

### 3.

## Análise do movimento acoplado de barras com elevada rigidez à torção

*“Há no ser humano duas tendências que, constantemente, estão fluando: uma é a que trata de conduzi-lo em todos os movimentos mentais da vida para o que é passageiro, o instável; a outra, a que tende a levá-lo para o permanente. Desta última é de onde provêm as perguntas que o ser formula, buscando explicação para o muito que necessita explicar-se, para satisfazer às necessidades de seu espírito.”*

Carlos Bernardo González Pecotche.

### 3.1.

#### Aspectos gerais

No capítulo anterior, o método de Galerkin foi usado para discretização das equações de movimento, resultando em um sistema de equações integro-diferencial não linear no domínio do tempo. Este conjunto de equações é utilizado neste capítulo para investigar as oscilações não lineares, sua estabilidade e os tipos de bifurcações associados ao movimento tridimensional de barras com elevada rigidez à torção. Os aspectos concernentes à teoria de sistemas dinâmicos não lineares que aparecem neste capítulo e nos próximos podem ser encontrados com detalhes em Guckenheimer e Holmes (1983), Seydel (1988), Moon (1992), Thompson e Stewart (1993), Argyris, Faust e Haase (1994), Nayfeh e Balachandran (1995) e Del Prado (2001).

### 3.2.

#### Vibração livre não linear

Como ponto de partida, adota-se uma barra uniforme, de material elástico linear isotrópico, comprimento  $L$  e seção transversal quadrada de lado  $a = b = L / 25$ . Da teoria da elasticidade sabe-se que:

$$D_{\xi} = k_1 b a^3 G, \quad (3.1)$$

$$D_{\eta} = \frac{a b^3}{12} E, \quad (3.2)$$

$$D_{\zeta} = \frac{a^3 b}{12} E. \quad (3.3)$$

onde,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $E$  é o módulo de Young e  $k_1$  é calculado usando as Equações (168) e (171) de Timoshenko e Goodier (1970).

Conhecidas as rigidezes à torção,  $D_\xi$ , e à flexão,  $D_\eta$  e  $D_\zeta$ , as seguintes grandezas adimensionais podem ser determinadas:

$$\beta_y = \frac{D_\zeta}{D_\eta} = \frac{a^3 b E}{12} \frac{12}{a b^3 E} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \beta_\gamma &= \frac{D_\xi}{D_\eta} = k_1 \frac{12 b a^3 G}{a b^3 E} = 12 k_1 \frac{G}{E} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ &= 12 \frac{G}{E} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left[ \frac{1}{3} - 0,21 \frac{a}{b} \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{a}{b}\right)^4\right) \right] = 0.64381, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$J_\eta = \frac{(b/L)^2}{12} = 0,00013, \quad (3.6)$$

$$J_\zeta = \frac{(a/L)^2}{12} = 0,00013, \quad (3.7)$$

$$J_\xi = J_\eta + J_\zeta = 0,00026. \quad (3.8)$$

sendo,  $J_\xi$ ,  $J_\eta$  e  $J_\zeta$  os momentos de inércia da barra. Por meio das Equações (2.150) a (2.152), têm-se as constantes  $C_v = 1$ ,  $C_w = 1$  e  $C_\gamma = \sqrt{2}$ .

De posse das grandezas relacionadas com a geometria da barra e com a mecânica do material, bem como, fazendo  $P_s = q_u = mg = 0$  e desconsiderando os coeficientes de Galerkin  $\alpha_{v7}$  a  $\alpha_{v15}$ ,  $\alpha_{w7}$  a  $\alpha_{w14}$  e  $\alpha_{\gamma6}$  a  $\alpha_{\gamma8}$ , o sistema de Equações (2.153) a (2.155) reduz-se a:

$$\begin{cases} 1,0002 \ddot{v} + 1,0002 c_v \dot{v} + 12,366 v - 6,5994 \gamma w + 40,472 (v w^2 + v^3) \\ \quad + 4,599 (\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v \ddot{v} + w \ddot{w}) v - 0,783 q_v \cos(\Omega t) = 0 \\ 1,0002 \ddot{w} + 1,0002 c_w \dot{w} + 12,366 w + 6,5994 \gamma v + 40,472 (w v^2 + w^3) \\ \quad + 4,599 (\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w \ddot{w} + v \ddot{v}) w - 0,783 q_w \cos(\Omega t) = 0 \\ \dot{\gamma} + c_\gamma \dot{\gamma} + 5957,0 \gamma + 2,6746 (\dot{v} w - v \dot{w}) - 0,0001 \dot{v} \dot{w} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Linearizando o sistema dado na Equação (3.9), obtêm-se as menores

frequências naturais angulares de vibração da barra associadas a cada um dos modos. Elas são,

$$\omega_v = \omega_w = \sqrt{\frac{12,388}{1,002}} = 3,51618, \quad (3.10)$$

$$\omega_\gamma = \sqrt{\frac{320,219}{1,0}} = 77,19160. \quad (3.11)$$

Nota-se nas Equações (3.10) e (3.11) que a frequência natural de vibração associada ao modo de torção é muito maior que as associadas aos modos de flexão; um comportamento esperado para barras com elevada rigidez à torção.

O sistema de três equações diferenciais homogêneas não lineares de segunda ordem resultante, dado na Equação (3.12), pode, por meio de uma mudança de variáveis, ser reescrito como um sistema de seis equações diferenciais homogêneas não lineares de primeira ordem no tempo. Este procedimento permite o uso de todo um arcabouço teórico, bem como de sofisticadas ferramentas numéricas desenvolvidas nas últimas décadas para a análise de sistemas dinâmicos não lineares. Assim tem-se

$$\begin{cases} 1,0002 \ddot{v} + 12,366 v - 6,5994 \gamma w + 40,472 (v w^2 + v^3) \\ \quad + 4,599 (\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v \ddot{v} + w \ddot{w}) v = 0 \\ 1,0002 \ddot{w} + 12,366 w + 6,5994 \gamma v + 40,472 (w v^2 + w^3) \\ \quad + 4,599 (\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w \ddot{w} + v \ddot{v}) w = 0 \\ \dot{\gamma} + 5957,0 \gamma + 2,646 (\ddot{v} w - v \ddot{w}) - 0,0001 \dot{v} \dot{w} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= v ; \\ y_2 &= \dot{v} ; \\ y_3 &= w ; \\ y_4 &= \dot{w} ; \\ y_5 &= \gamma ; \\ y_6 &= \dot{\gamma} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \dot{v} = y_2 \\ \dot{y}_3 = \dot{w} = y_4 \\ \dot{y}_5 = \dot{\gamma} = y_6 \\ \dot{y}_2 = \ddot{v} = \frac{1}{vw} \left[ -0,2175\dot{w} - 2,6888w - 1,435\gamma v - 8,8002(wv^2 + w^3) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. - (\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w\ddot{w})w \right] \\ \dot{y}_4 = \ddot{w} = \frac{1}{vw} \left[ -0,2175\dot{v} - 2,6888v + 1,435\gamma w - 8,8002(vw^2 + v^3) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. - (\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v\ddot{v})v \right] \\ \dot{y}_6 = \ddot{\gamma} = -5957,0\gamma - 2,6746(\ddot{v}w + v\ddot{w}) - 0,0001\dot{v}\dot{w} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{vw} \left[ -0,2175\dot{y}_4 - 2,6888y_3 - 1,435y_5y_1 \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. - 8,8002(y_3y_1^2 + y_3^3) - (y_2^2 + y_4^2 + y_3\dot{y}_4)y_3 \right] \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{1}{vw} \left[ -0,2175\dot{y}_2 - 2,6888y_1 + 1,435y_5y_3 \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. - 8,8002(y_1y_3^2 + y_1^3) - (y_2^2 + y_4^2 + y_1\dot{y}_2)y_1 \right] \\ \dot{y}_5 = y_6 \\ \dot{y}_6 = -5957,0y_5 - 2,6746(\dot{y}_2y_3 + y_1\dot{y}_4) - 0,0001y_2y_4 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Na Figura 3.1 mostra-se a resposta no tempo para vibração livre não amortecida da barra, associada às frequências naturais  $\omega_v$ ,  $\omega_w$  e  $\omega_\gamma$ . Neste caso tem-se uma ressonância interna 1:1 em virtude da coincidência das duas frequências de flexão.

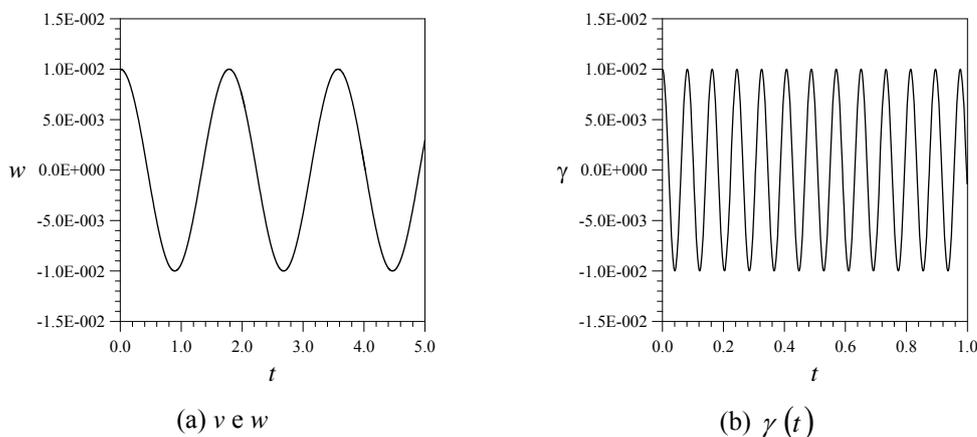


Figura 3.1 – Resposta no tempo para vibração livre não amortecida da barra.

Na Figura 3.2 apresenta-se a relação não linear frequência vs. amplitude. Observa-se que a curva tem início no valor da frequência natural de vibração da barra e apresenta um comportamento não linear com ganho de rigidez (*hardening*).

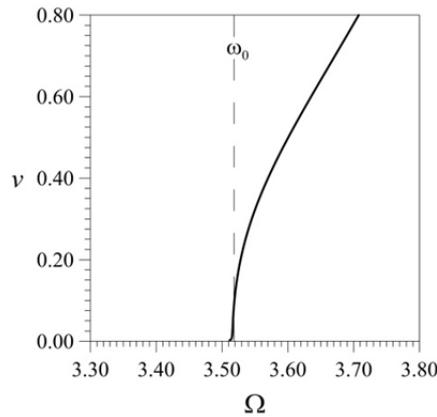


Figura 3.2 – Relação frequência-amplitude.

### 3.3.

#### Vibração forçada amortecida – flexão simples

Considera-se na análise numérica os coeficientes de amortecimentos  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_v = 0,20$  e  $q_w = 0,00$ , ou seja, uma carga aplicada apenas na direção do deslocamento  $v$ . Desta maneira, o sistema de equações não lineares é, a partir da Equação (3.9) e para barra com razão  $L/b = 25$ , dado por

$$\begin{cases} 1,0002 \ddot{v} + 0,05 \dot{v} + 12,366 v - 6,5994 \gamma w + 40,472 (v w^2 + v^3) \\ \quad + 4,599 (\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v \ddot{v} + w \ddot{w}) v - 0,1566 \cos(\Omega t) = 0 \\ 1,0002 \ddot{w} + 0,050 \dot{w} + 12,366 w + 6,5994 \gamma v + 40,472 (w v^2 + w^3) \\ \quad + 4,599 (\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w \ddot{w} + v \ddot{v}) w = 0 \\ \dot{\gamma} + 0,050 \dot{\gamma} + 5957,0 \gamma + 2,6746 (\ddot{v} w - v \ddot{w}) - 0,0001 \dot{v} \dot{w} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

O sistema dinâmico dado na Equação (3.15) é função de um conjunto de variáveis e de parâmetros, genericamente conhecidos por variáveis de estado e parâmetros de controle. Em determinadas situações, mudanças qualitativas na resposta de um sistema dinâmico podem ocorrer devido a variações dos parâmetros de controle, mudanças estas denominadas de bifurcações. Os diagramas de bifurcação relacionam, justamente, as variáveis de estado com os

parâmetros de controle e ilustram as possíveis mudanças no número, estabilidade e tipo de soluções.

Na Figura 3.3 apresenta-se a variação dos máximos deslocamentos da barra em função da frequência de vibração da excitação lateral,  $\Omega$ . Estes diagramas foram obtidos utilizando o software de continuação AUTO (Doedel *et al.*, 1998). Na Figura 3.3, bem como no restante do trabalho, os trechos contínuos e tracejados representam, respectivamente, as soluções estáveis e instáveis, segundo a teoria de Floquet (Nayfeh e Balachandran, 1995). Linhas com diferentes cores representam diferentes ramos ou braços de soluções. Na Figura 3.4 reapresentam-se os diagramas de bifurcação da Figura 3.3, agora no espaço  $v-w-\Omega$ ,  $v-w-\gamma$  e  $w-\gamma-\Omega$ . Nela observa-se melhor os diversos ramos de soluções estáveis e instáveis na região de ressonância.

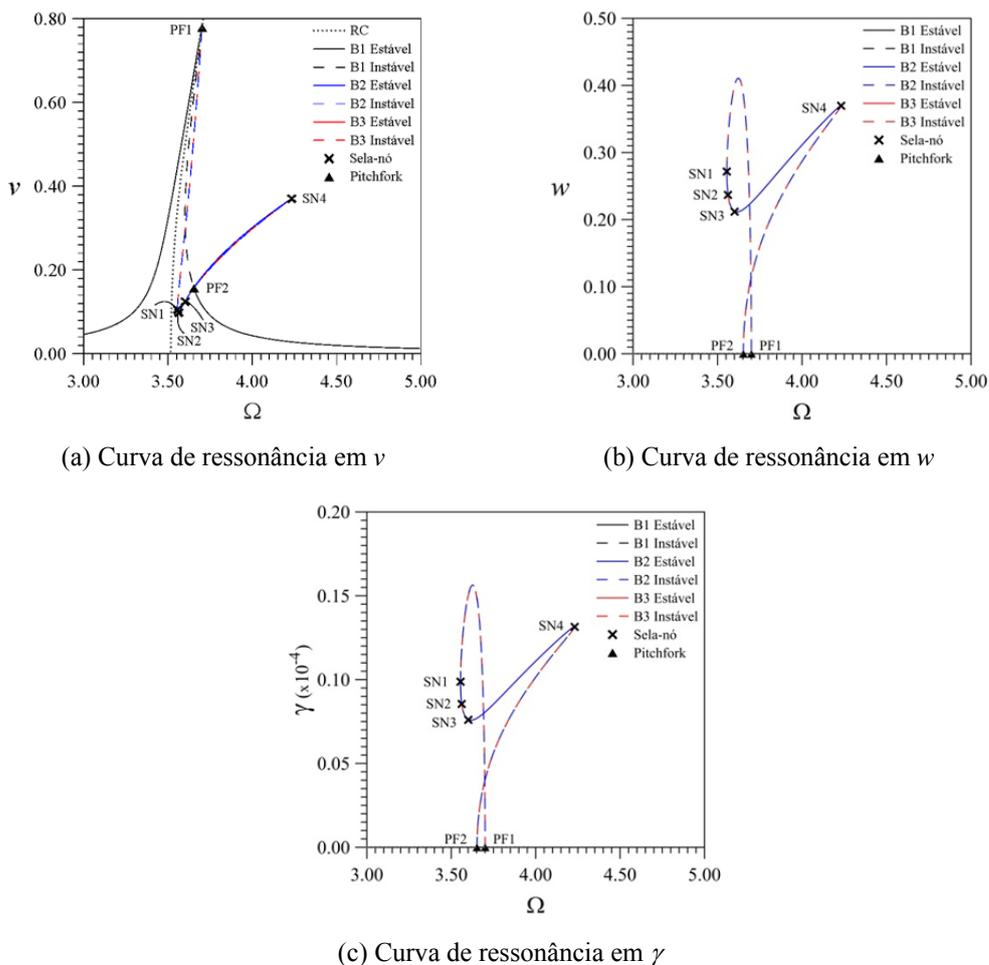


Figura 3.3 – Diagramas de bifurcação para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_v = 0,20$  e  $q_w = 0,00$ .

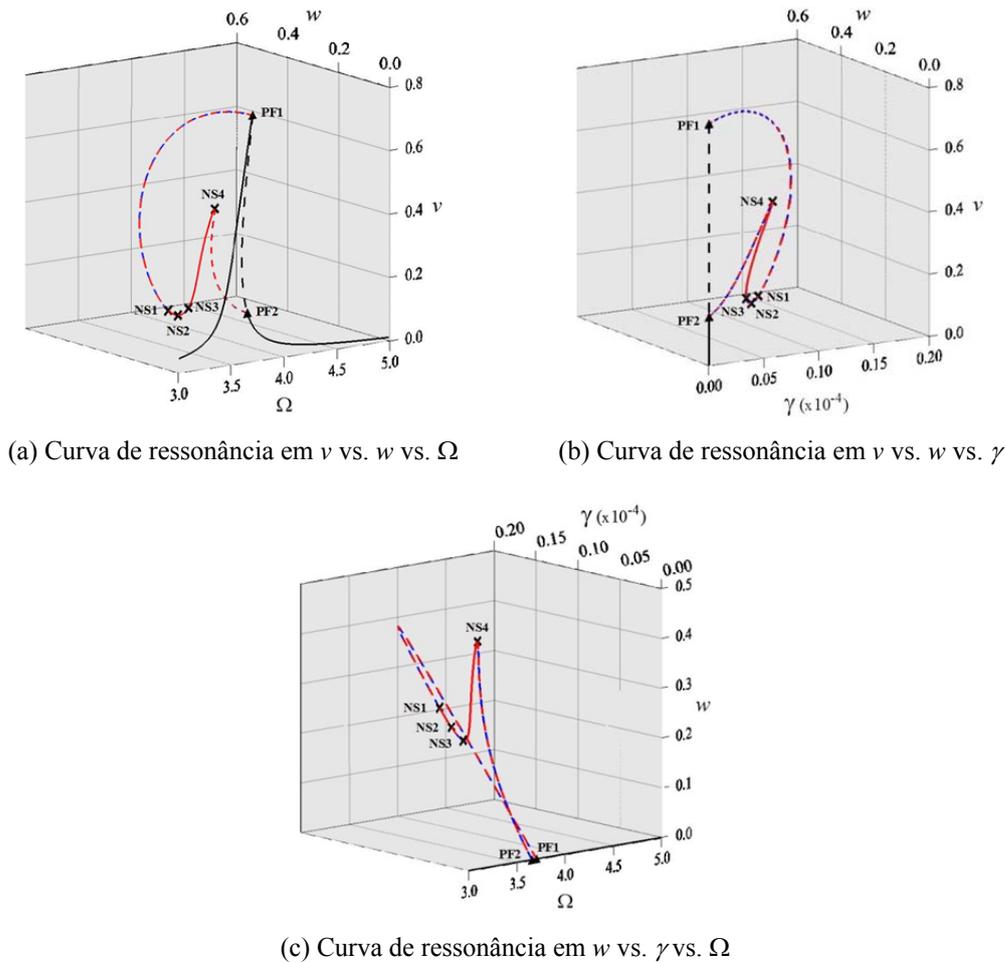


Figura 3.4 – Detalhes do diagrama de bifurcações da Figura 3.3 na região de ressonância.

Na Figura 3.3 e Figura 3.4 observa-se que, mesmo a barra sendo solicitada apenas na direção do deslocamento  $v$ , quando a frequência de vibração da solicitação aproxima-se da frequência natural de vibração da barra ocorre uma bifurcação e a barra passa a apresentar deslocamentos nos três graus de liberdade, sendo que os de maior amplitude ocorrem na direção da solicitação. A Figura 3.5 ilustra a influência da magnitude da carga na estabilidade da coluna. Para isto varia-se a magnitude da solicitação lateral de  $q_v = 0,025$  a  $q_v = 0,200$ . Observa-se que para carga  $q_v = 0,025$  (Figura 3.5.a) que a viga apresenta um comportamento praticamente linear e que não há bifurcações. Para  $q_v = 0,050$  já se observa a presença de vibrações não planares. As bifurcações permanecem então as mesmas a medida que a carga e, conseqüentemente, as amplitudes de vibração aumentam.

A posição dos multiplicadores de Floquet, reais ou pares complexos conjugados, em relação ao círculo de raio unitário, fornece a informação necessária sobre a estabilidade de uma solução periódica, sendo o tipo de

bifurcação dependente da maneira pela qual os multiplicadores deixam o círculo unitário. Na Figura 3.6 apresenta-se a evolução dos multiplicadores de Floquet para as curvas de ressonância apresentadas na Figura 3.3 e Figura 3.4.

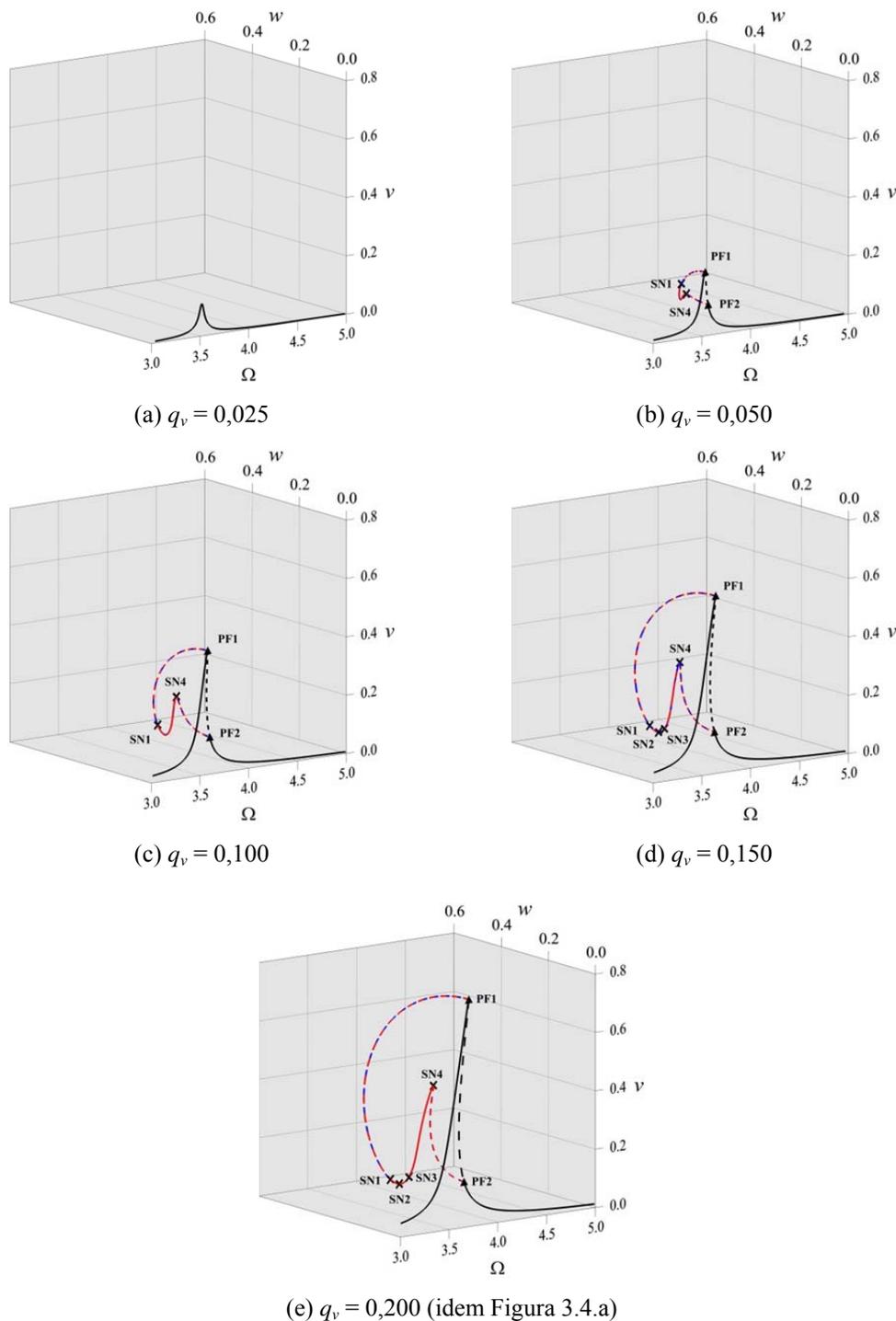


Figura 3.5 – Diagramas de bifurcações no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $\Omega$  para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e magnitude da solicitação lateral variando de  $q_v = 0,025$  a  $q_v = 0,200$ .

Tomando como referência a Figura 3.4.a, verifica-se que anterior ao ponto de bifurcação PF1, existe um único braço de soluções periódicas. Até este ponto,

todos os multiplicadores de Floquet encontravam-se dentro do círculo de raio unitário, caracterizado assim um braço de soluções estáveis. Contudo, nota-se na Figura 3.6.a que, com o incremento do parâmetro de controle, um par de multiplicadores complexo conjugado aproxima-se do eixo dos números reais, transforma-se em um multiplicador real e sai do círculo através do ponto +1. Neste instante, verifica-se no diagrama de bifurcação que o braço de soluções periódicas estáveis à esquerda do ponto limite PF1, torna-se instável à sua direita. Além disso, surgem no ponto dois novos braços de soluções periódicas instáveis, superpostos entre si, relativos a soluções não planares, e coexistindo com o braço de soluções planares. Neste caso, tem-se que o ponto PF1 corresponde a uma bifurcação do tipo *pitchfork* instável (bifurcação por quebra de simetria subcrítica, também chamada de bifurcação simétrica instável). Na Figura 3.4.a verifica-se que os dois novos braços de soluções periódicas instáveis exibem, cada um, quatro pontos limites, SN1, SN 2, SN 3 e SN 4.

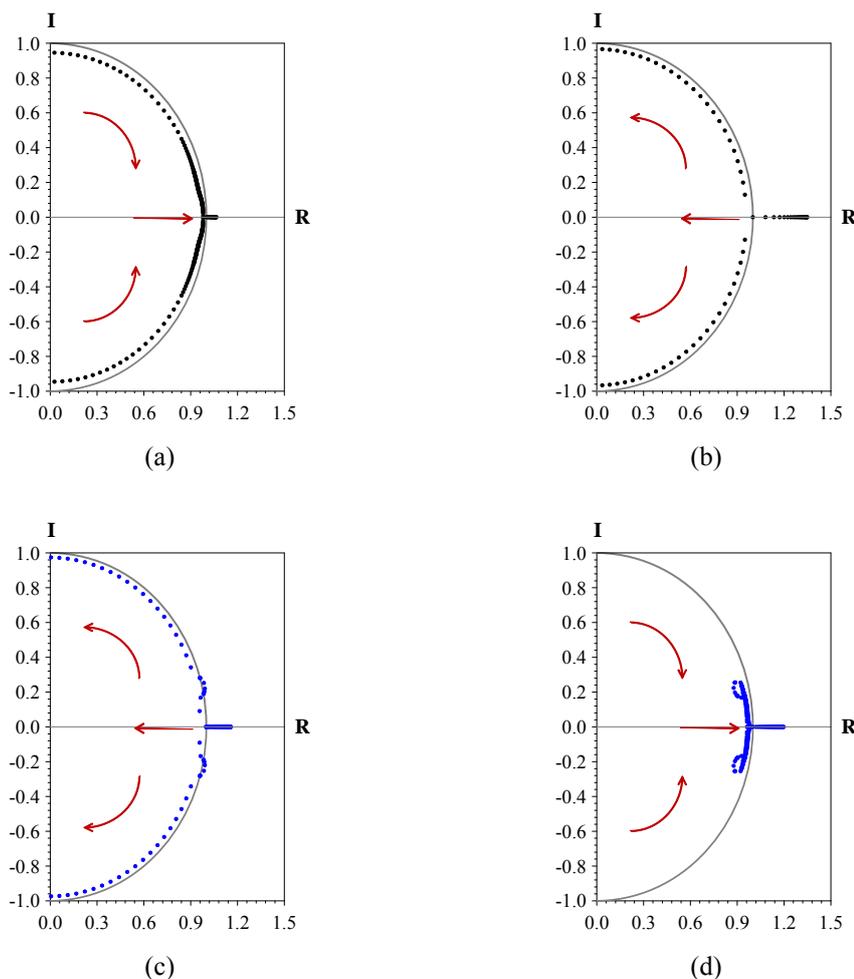


Figura 3.6 – Multiplicadores de Floquet para o diagrama de bifurcação da Figura 3.3 e Figura 3.4: (a) e (b) Referentes ao braço de soluções B1; (c) e (d) Referentes ao braço de soluções B2 e B3.

Na Figura 3.6.c observa-se que, com o incremento do parâmetro de controle, o multiplicador real que estava fora do círculo de raio unitário e caracterizava o braço de soluções periódicas instáveis, reaproxima-se do círculo, entra nele através do ponto +1 e transforma-se em um par de multiplicadores complexo conjugado. Neste instante, tem-se no diagrama de bifurcação a presença do ponto limite SN1. A seguir, o par de multiplicadores complexo conjugado que estava dentro do círculo de raio unitário, sai e retorna ao círculo através do primeiro quadrante, acusando no diagrama de bifurcações os pontos limites SN2 e SN3, respectivamente. Na sequência, vê-se na Figura 3.6.d que, novamente, um par de multiplicadores complexo conjugado aproximam-se do eixo dos números reais, transforma-se em um multiplicador real, e sai do círculo de raio unitário por +1, caracterizando assim o ponto limite NS4.

Os pontos limites SN1, SN 2, SN 3 e SN 4, também são conhecidos por bifurcações do tipo sela-nó, ou dobra. Nestes pontos, o braço de soluções estáveis que existia antes da bifurcação transforma-se, após a bifurcação, em um braço de soluções periódicas instáveis e vice-versa.

Seguindo a Figura 3.4.a, observa-se que, após a bifurcação sela-nó SN 4, as três soluções periódicas instáveis convergem para um novo ponto de bifurcação, PF2, onde uma das soluções periódicas instáveis continua, após a bifurcação, como um braço de soluções estáveis, enquanto que os outros dois braços de soluções periódicas instáveis são destruídos (*pitchfork* reverso). Na Figura 3.6.b, constata-se que o multiplicador real que estava fora do círculo de raio unitário e caracterizava o braço de soluções periódicas instáveis, reaproxima-se do círculo, entra nele através do ponto +1 e transforma-se em um par de multiplicadores complexo conjugado.

Cabe ressaltar que se for considerada na análise apenas a equação de movimento na direção da solicitação (equação em  $v$ ), procedimento usual na literatura (Sathyamoorthy, 1998), obtém-se apenas a curva em preto na Figura 3.4.a, que corresponde a uma curva de ressonância típica de um sistema com ganho de rigidez, e os pontos de bifurcação *pitchfork* se transformam em pontos de bifurcação sela-nó. Perde-se desta forma todas as informações sobre as vibrações não planares da estrutura.

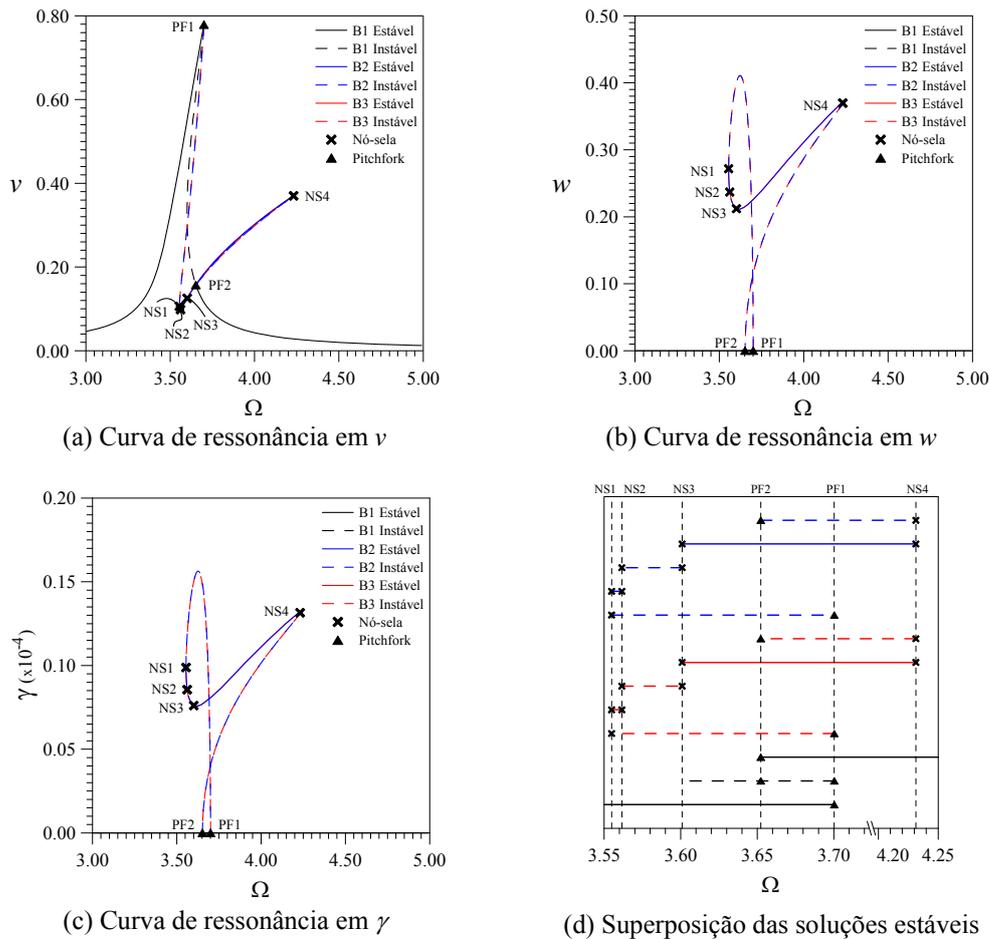


Figura 3.7 – Superposição dos braços de soluções estáveis para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ , solicitações  $q_v = 0,20$  e  $q_w = 0,00$ . Coexistência de soluções.

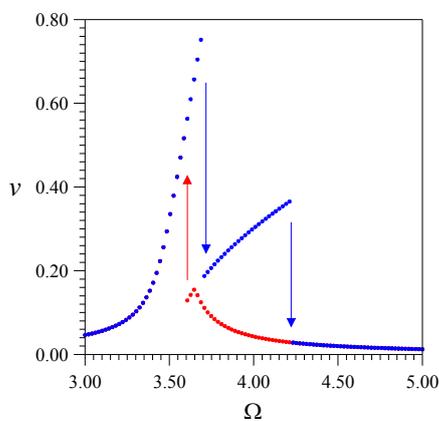
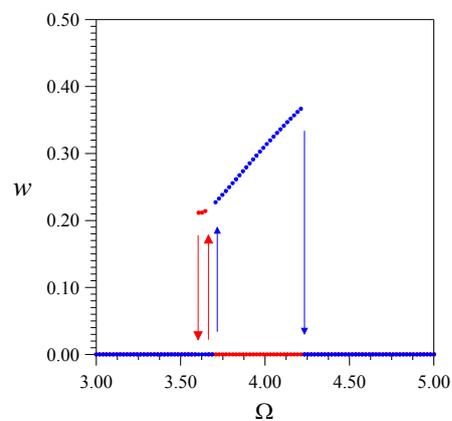
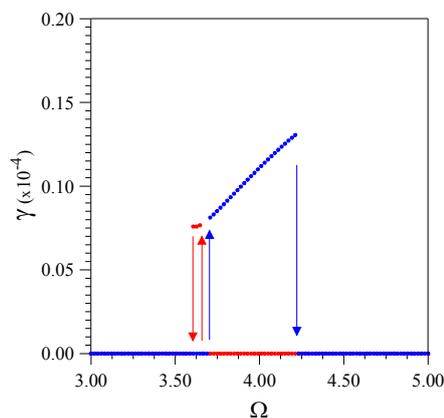
Para facilitar a identificação dos diferentes braços de soluções estáveis, apresentam-se na Tabela 3.1 as coordenadas dos pontos de sela e de bifurcação que aparecem nos diagramas de bifurcação da Figura 3.3, os quais são rerepresentados na Figura 3.7. Em adição, na Figura 3.7.d, mostram-se as faixas de frequência associadas a cada braço de soluções.

Na Figura 3.7.d verifica-se a superposição de diversas soluções periódicas estáveis, existindo faixas de frequência com até 4 soluções coexistentes, o que acusa a possibilidade de ocorrerem saltos dinâmicos com a variação da frequência de excitação. Com o objetivo de detectar a existência destes saltos, apresentam-se na Figura 3.8 os diagramas de bifurcação obtidos através do algoritmo de força bruta, o qual identifica apenas as soluções estáveis.

Como esperado, verifica-se na Figura 3.8, a possibilidade de diversos saltos dinâmicos à medida que cresce (em azul) ou decresce (em vermelho) a frequência de vibração da excitação.

Tabela 3.1 – Coordenadas espaciais dos pontos limites e de bifurcação observados na Figura 3.7.

Ponto	$\Omega$	$v$	$w$	$\gamma$
PF 1	3.700318	0.779034	0.000000	0.0000E+00
PF 2	3.652317	0.156825	0.000000	0.0000E+00
NS 1	3.554873	0.105855	0.271789	0.0986E-04
NS 2	3.561594	0.098084	0.236923	0.0855E-04
NS 3	3.600898	0.125271	0.212006	0.0761E-04
NS 4	4.231362	0.370130	0.369824	0.1315E-04

(a) Saltos dinâmicos em  $v$ (b) Saltos dinâmicos em  $w$ (c) Saltos dinâmicos em  $\gamma$ Figura 3.8 – Saltos dinâmicos para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_v = 0,20$  e  $q_w = 0,00$ .

A identificação das órbitas periódicas e o estudo de sua estabilidade nem sempre é uma tarefa fácil. Para simplificá-la, geralmente se usa o mapeamento de Poincaré, que é, em síntese, uma hiper-superfície imersa no espaço de fase e no

sentido transversal ao fluxo definido pelo sistema de equações diferenciais. Este espaço de menor dimensão, denominado seção de Poincaré, onde o tempo aparece implicitamente, é comumente utilizado para visualizar a evolução do sistema dinâmico no tempo e assim compreender o seu comportamento. Na Figura 3.10, por exemplo, mostra-se a reposta no tempo e os correspondentes planos de fase e seções de Poincaré para a barra engastada-livre com razão  $L/b = 25$ , amortecimentos  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ , solicitações  $q_v = 0,2$  e  $q_w = 0$  e frequência de excitação  $\Omega = 3,68$ , indicada na Figura 3.9.

Por meio da Figura 3.10 é possível observar a existência de pelo menos três soluções estáveis em  $\Omega = 3,68$ . Observando cada uma das variáveis de estado, verifica-se que todas as soluções são de período  $1T$  (uma solução  $nT$  corresponde a um movimento periódico cujo período é  $n$  vezes o período da excitação). As soluções A e B correspondem a vibrações periódicas na direção da excitação enquanto a solução C corresponde à solução que surge devida à interação modal, levando a uma vibração periódica no espaço.

Uma visão global do comportamento da estrutura na presença de perturbações, as quais podem ocorrer durante a construção e vida útil da estrutura, é fundamental para se projetar com segurança uma estrutura com multiplicidade de soluções (estruturas não lineares) sob a ação de cargas dinâmicas. A influência das condições iniciais na resposta permanente do sistema pode ser analisada estudando-se as bacias de atração das diversas soluções. Além disso, o estudo das bacias de atração tem-se mostrado uma ferramenta útil na análise da estabilidade global e da integridade de sistemas dinâmicos (Santee, 1999; Soliman, 1995; Orlando, 2010). Esta tarefa é relativamente fácil quando se lida com sistemas com um grau de liberdade, porém torna-se bastante complexa e computacionalmente cara quando se trabalha com sistemas com vários graus de liberdade. Ainda assim, projeções criteriosas da bacia de atração podem fornecer informações importantes sobre o grau de segurança da estrutura (Orlando, 2010).

Na Figura 3.11, apresentam-se quatro seções da bacia de atração para a frequência de excitação  $\Omega = 3,68$  (Figura 3.9). Nestas projeções observam-se quatro regiões distintas associadas a três tipos distintos de comportamento, a saber: a) região preta – solução trivial de maior amplitude de vibração (atrator A na Figura 3.9); b) região verde – solução trivial de menor amplitude de

vibração (atrator B na Figura 3.9); c) regiões vermelha e azul – soluções não triviais devidas à interação modal (atratores C e D na Figura 3.9, respectivamente). Cabe destacar que as soluções não triviais são coincidentes na Figura 3.9.

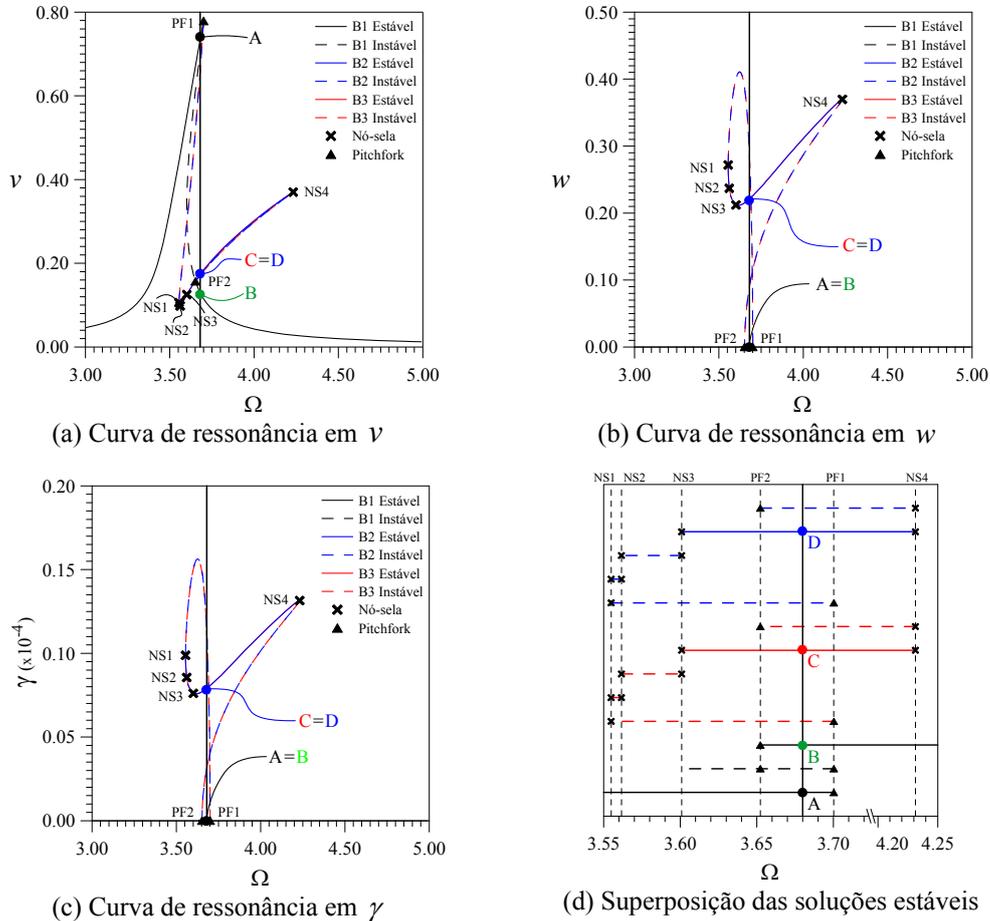


Figura 3.9 – Seção investigada nos diagramas de bifurcação da barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_v = 0,20$  e  $q_w = 0,00$ .

Olhando para cada uma das projeções, nota-se na Figura 3.11.a a presença dos dois atratores triviais de período 1T (período da resposta igual ao período da força). Na Figura 3.11.c observa-se que todas as condições iniciais levam à solução de menor amplitude de vibração. Na Figura 3.11.b têm-se a presença dos dois atratores não-triviais de solução 1T, bem como a do atrator trivial de menor amplitude de vibração e, na Figura 3.11.d, para um mesmo parâmetro de controle, verifica-se a presença dos quatro atratores.

Destas quatro projeções da bacia de atração conclui-se que a solução trivial de maior amplitude só aparece quando se perturba o grau de liberdade de deslocamento  $v$  e que a interação modal só é ativada quando a perturbação envolve alguma condição inicial não nula em  $w$ .

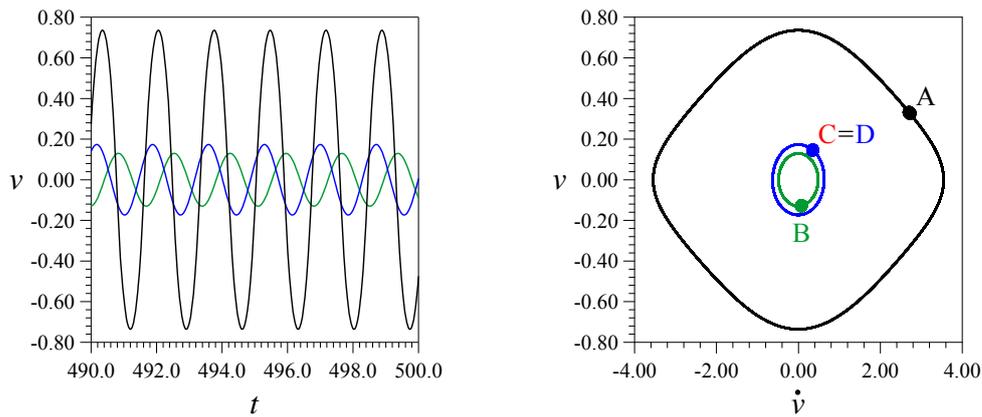
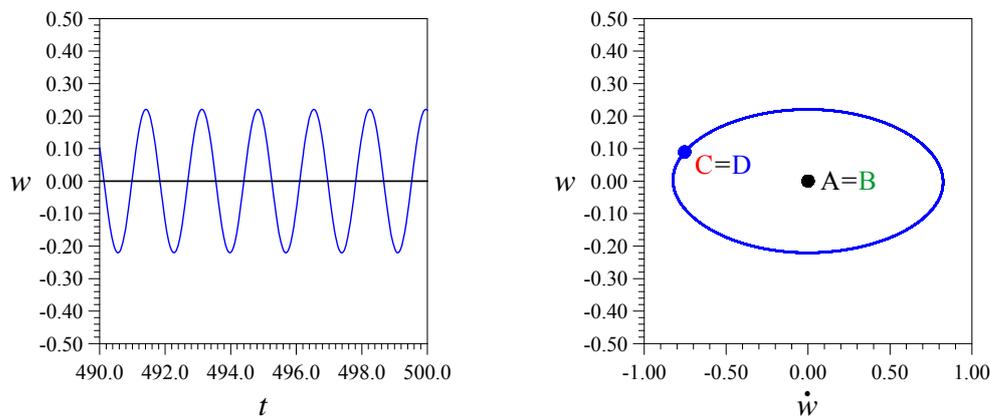
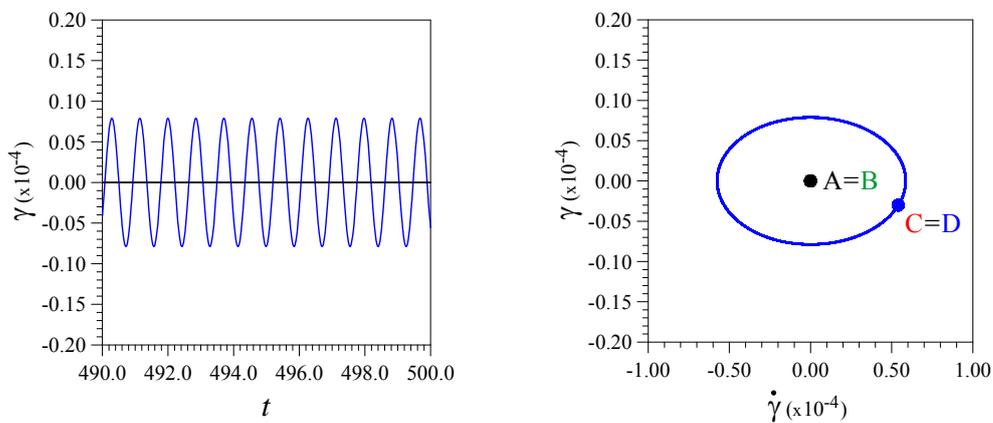
(a) Deslocamento  $v$  – Velocidade  $\dot{v}$ (b) Deslocamento  $w$  – Velocidade  $\dot{w}$ (c) Deslocamento  $\gamma$  – Velocidade  $\dot{\gamma}$ 

Figura 3.10 – Resposta no tempo e plano de fase para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ , solicitações  $q_v = 0,20$  e  $q_w = 0,00$  e frequência  $\Omega = 3,68$ .

O sistema dinâmico que governa o movimento não linear da barra é função de um conjunto de variáveis de estado e de parâmetros de controle. Até este ponto adotou-se como parâmetro de controle a frequência de excitação da solicitação, fixando-se a sua amplitude. Agora, adota-se como parâmetro de controle a amplitude da solicitação e fixa-se a frequência de excitação.

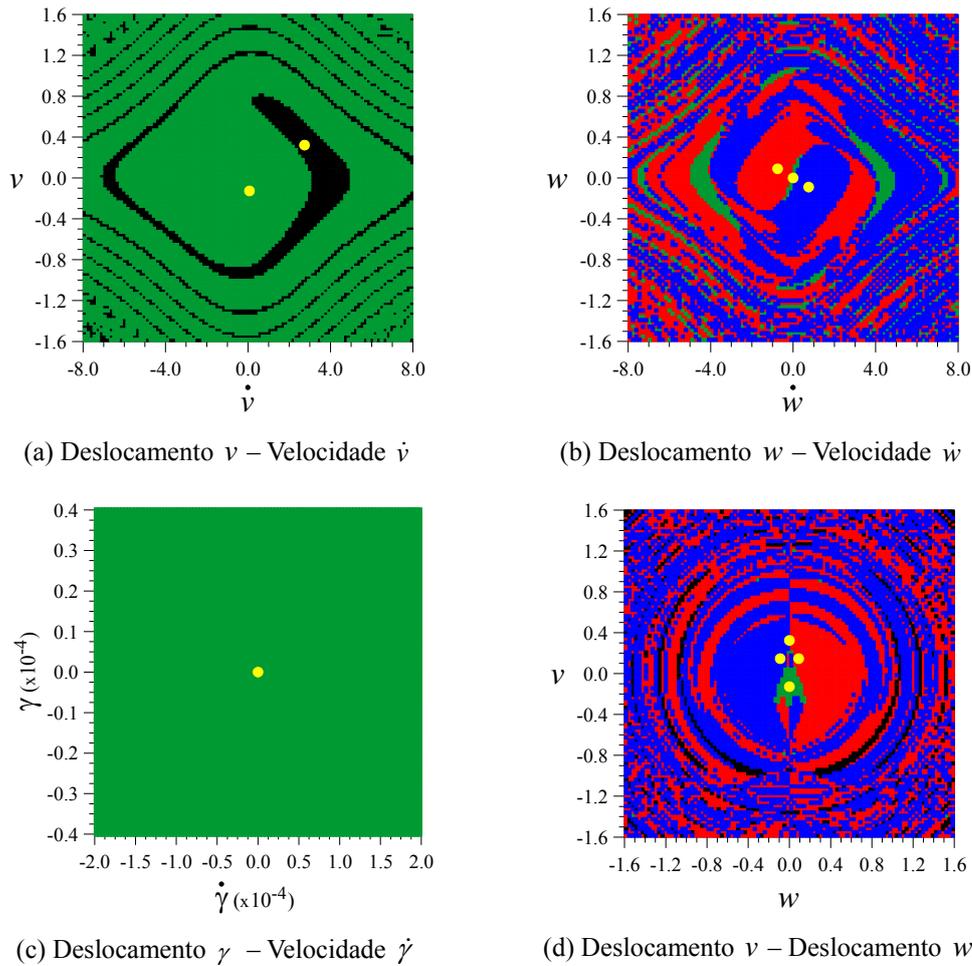


Figura 3.11 – Seções da bacia de atração para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ , solicitações  $q_v = 0,20$  e  $q_w = 0,00$  e frequência  $\Omega = 3,68$ .

Na Figura 3.12, apresenta-se a variação dos máximos deslocamentos da viga com relação à magnitude da excitação lateral, destacando também os saltos dinâmicos. Para isto fixa-se a frequência da excitação em  $\Omega = 3,55$  (região principal de ressonância).

O diagrama de bifurcação da Figura 3.12.a apresenta, inicialmente, um único braço de soluções estáveis (B1), contudo com o incremento da magnitude do carregamento, verifica-se no diagrama uma bifurcação do tipo *pitchfork* (PF1) onde o braço de soluções estável torna-se instável e surgem dois novos braços de soluções periódicas instáveis (B2 e B3, superpostos), coexistindo com o anterior.

Vê-se na Figura 3.12.a que os braços de soluções periódicas instáveis passam por um ponto limite sela-nó (NS1) continuando, após o ponto, como braços de soluções periódicas estáveis. Seguindo o diagrama nota-se que, em seguida, os dois braços de soluções periódicas estáveis alcançam um novo ponto

sela-nó (NS2), transformando-se, após este, em braços de soluções periódicas instáveis. Olhando para a Figura 3.12.b nota-se que precisamente no ponto de sela NS2 a resposta apresenta um salto dinâmico quando se cresce o carregamento (azul).

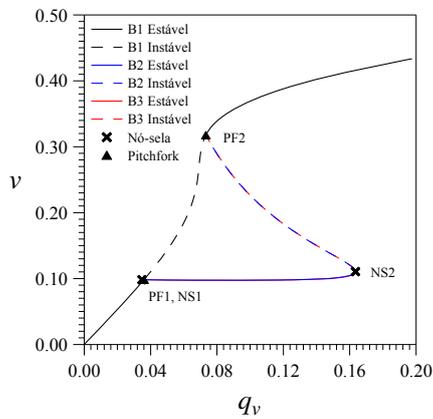
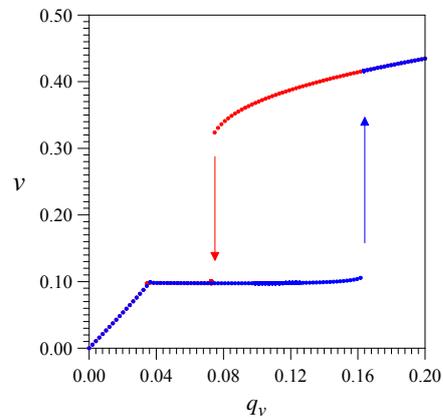
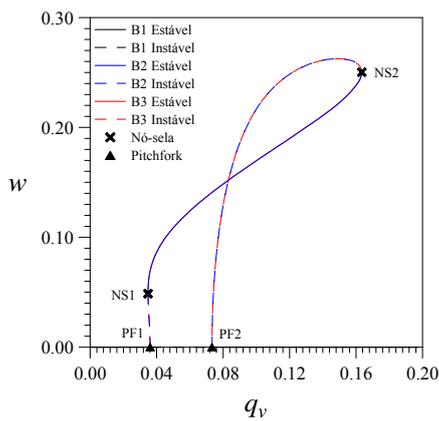
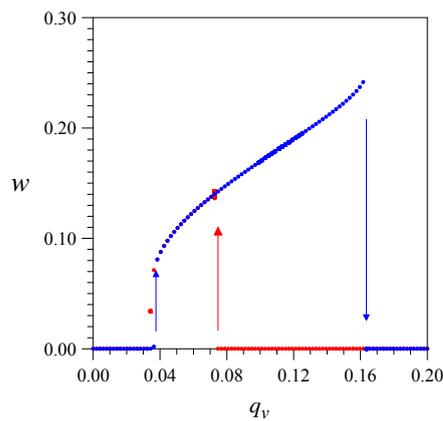
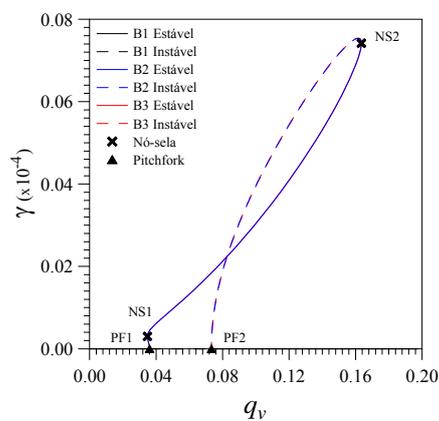
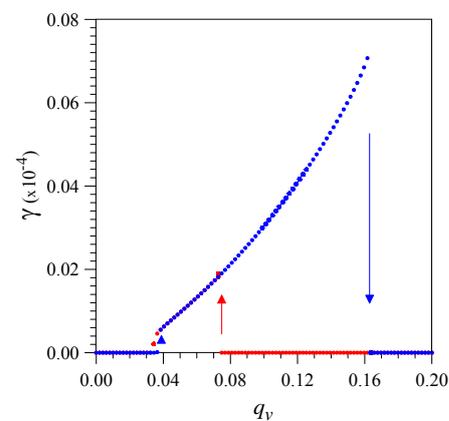
(a) Curva de ressonância em  $v$ (b) Salto dinâmico em  $v$ (c) Curva de ressonância em  $w$ (d) Salto dinâmico em  $w$ (e) Curva de ressonância em  $\gamma$ (f) Salto dinâmico em  $\gamma$ 

Figura 3.12 – Diagrama de bifurcações para viga com seção transversal quadrada,  $\Omega = 3,55$ , amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_w = 0,0$  e  $q_v$  variável.

Verifica-se na Figura 3.12.a que as três soluções periódicas instáveis convergem para um novo ponto de bifurcação do tipo *pitchfork* (PF2) reverso que coincide com um ponto extremo, onde, após a bifurcação, existe apenas um braço de soluções periódicas estáveis (os braços B2 e B3 são destruídos). Novamente neste ponto ocorre um salto dinâmico quando se decresce o carregamento (vermelho na Figura 3.12.b). Observando a solução no espaço das variáveis de estado, nota-se que as soluções periódicas instáveis vistas na Figura 3.12.a ocorrem quando os deslocamentos em  $w$  (Figura 3.12.c) e a rotação  $\gamma$  (Figura 3.12.e) são excitados, gerando um movimento acoplado.

A seguir investiga-se a estabilidade da viga engastada-livre considerando-se as frequências de excitação  $\Omega = 3,63$ ,  $\Omega = 3,68$ ,  $\Omega = 3,72$ ,  $\Omega = 4,20$  e  $\Omega = 4,25$  (Figura 3.13 a Figura 3.17). Dentre os casos acima relacionados, nota-se que os diagramas de bifurcações da Figura 3.13 ( $\Omega = 3,63$ ), Figura 3.14 ( $\Omega = 3,68$ ) e Figura 3.15 ( $\Omega = 3,72$ ) assemelham-se em comportamento aos vistos na Figura 3.12 ( $\Omega = 3,55$ ), variando de um caso a outro apenas a amplitude dos deslocamentos/rotações e a faixa de carregamento associada a cada braço de soluções. Tomando com exemplo  $q_v = 0,20$ , têm-se para  $\Omega = 3,63$  (Figura 3.13) a presença de três braços de soluções estáveis, para  $\Omega = 3,68$  (Figura 3.14) quatro braços e para  $\Omega = 3,72$  (Figura 3.15) novamente três braços de soluções estáveis, em conformidade com a Figura 3.9.d.

Nos diagramas de bifurcações da Figura 3.16 e Figura 3.17 verifica-se uma mudança de comportamento. Estes diagramas apresentam, no início, um braço de soluções estáveis (B1) que se ramifica em três braços de soluções periódicas instáveis após a bifurcação do tipo *pitchfork* (PF1). Seguindo o diagrama nota-se que dois dos braços de soluções periódicas instáveis (B2 e B3) passam por dois pontos limites sela-nó (NS1 e NS2) continuando, após cada ponto, como braços de soluções periódicas estáveis e vice-versa. Cabe mencionar que para  $q_v = 0,20$ , têm-se para  $\Omega = 4,20$  (Figura 3.16) a presença de três braços de soluções estáveis e para  $\Omega = 4,25$  (Figura 3.17) a presença de apenas um braço de soluções periódicas estáveis. Adicionalmente, na Figura 3.18, apresentam-se os diagramas de bifurcação, no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $q_v$ , onde se podem observar melhor os diferentes comportamentos da viga nas diferentes condições de excitação (variação da frequência).

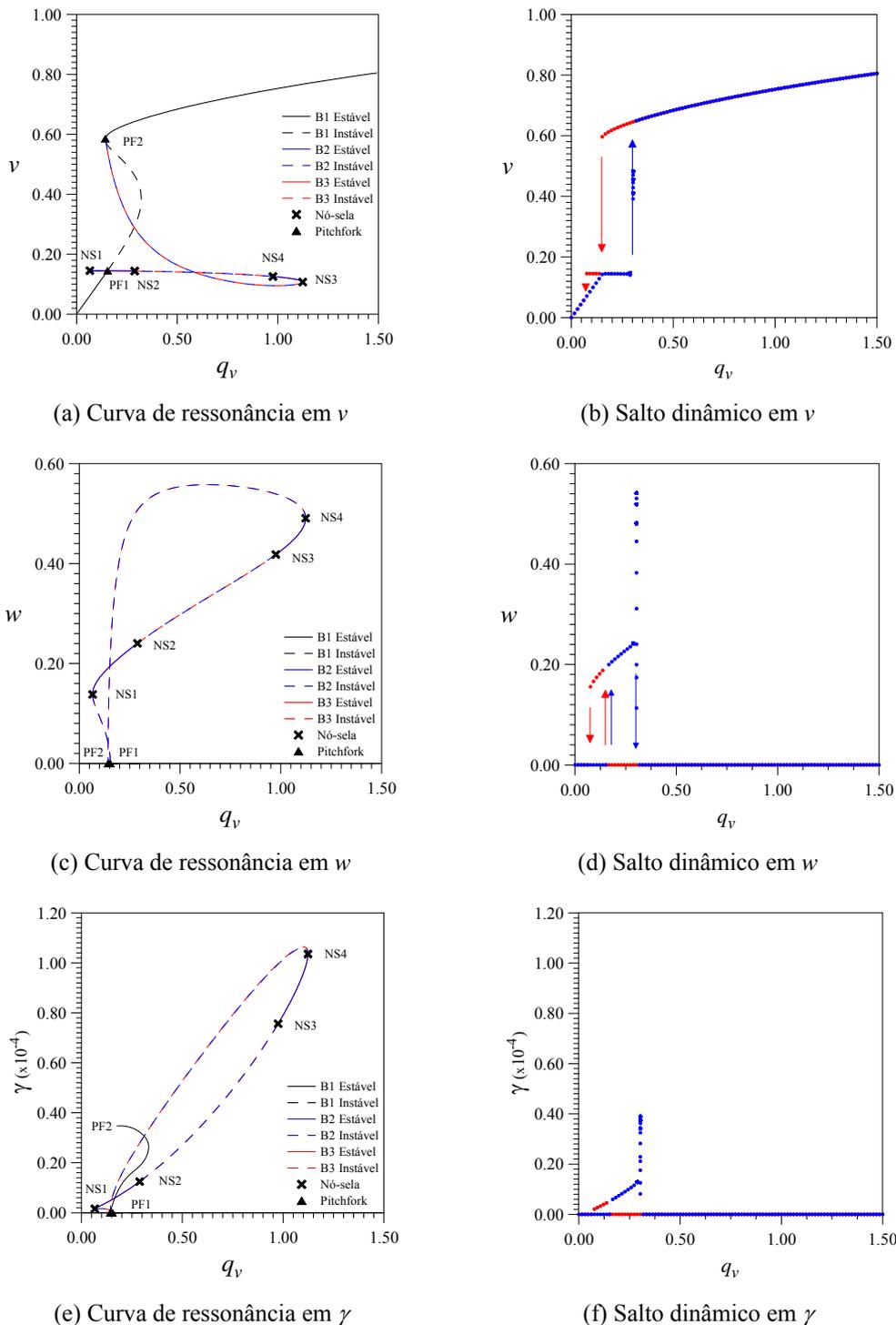


Figura 3.13 – Diagramas de bifurcação para viga com seção transversal retangular,  $\Omega = 3,63$ , amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_w = 0,0$  e  $q_v$  variável.

Ainda que os resultados obtidos variando-se a amplitude da solicitação até a magnitude  $q_v = 6,00$  ou superior sejam matematicamente consistentes, faz-se necessário verificar a coerência física dos resultados. Uma vez que os deslocamentos da barra são divididos pelo seu comprimento  $L$ , qualquer deslocamento superior à unidade é fisicamente incoerente, pois seria maior que o

próprio comprimento da barra. Tendo em conta este aspecto, apresenta-se na Figura 3.19, Figura 3.20 e Figura 3.21 as curvas de ressonância da viga em  $v$ ,  $w$  e  $\gamma$ , respectivamente, considerando diferentes magnitudes da solicitação. Nesses diagramas a informação sobre a estabilidade das soluções, bem como, a identificação dos pontos limites foram omitidas por conveniência.

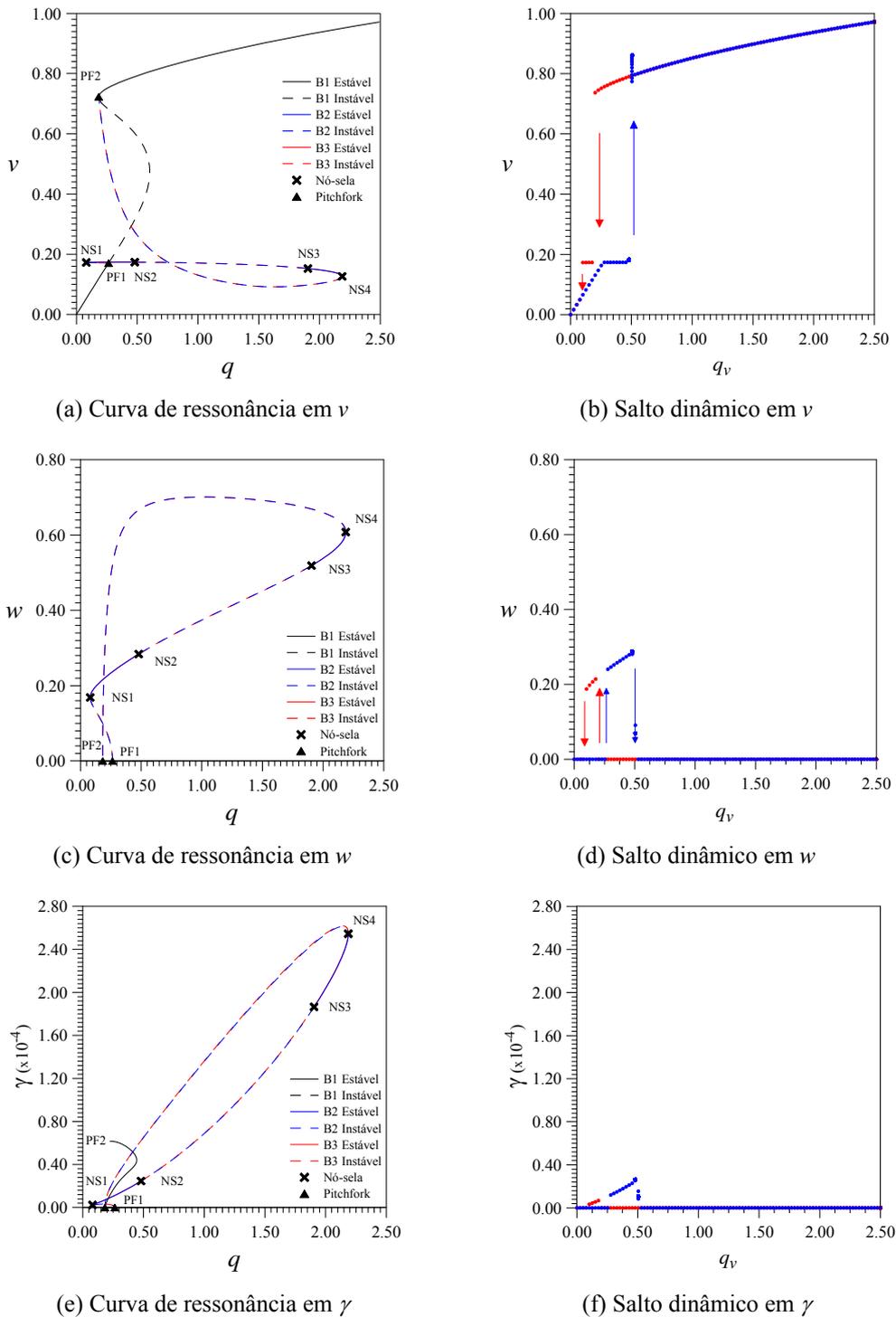


Figura 3.14 – Diagramas de bifurcação para viga com seção transversal retangular,  $\Omega = 3,68$ , amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_w = 0,0$  e  $q_v$  variável.

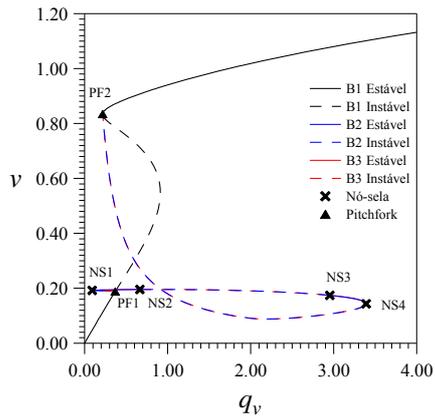
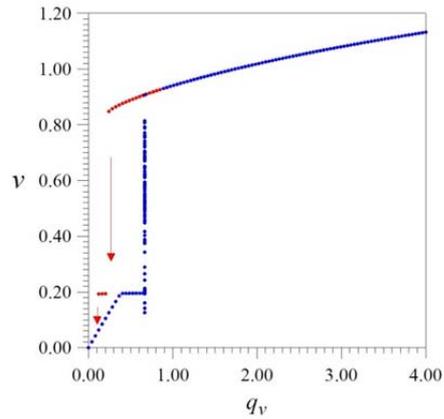
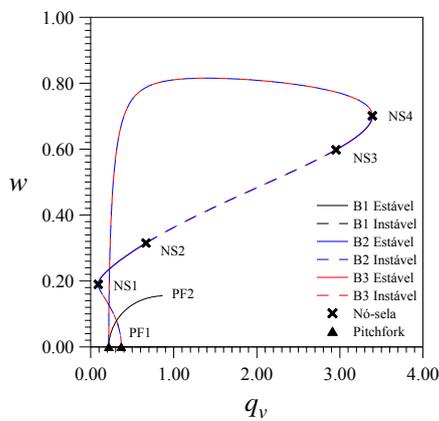
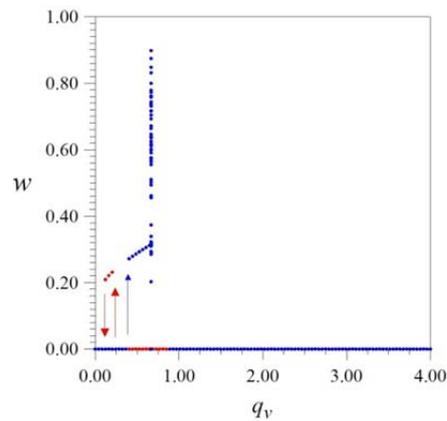
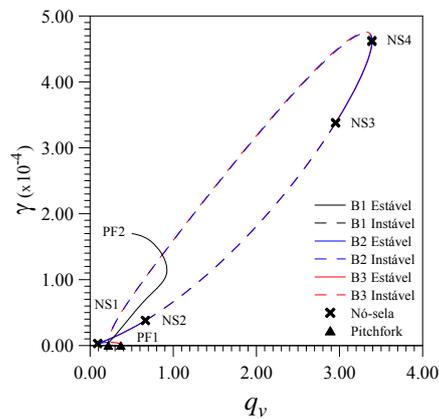
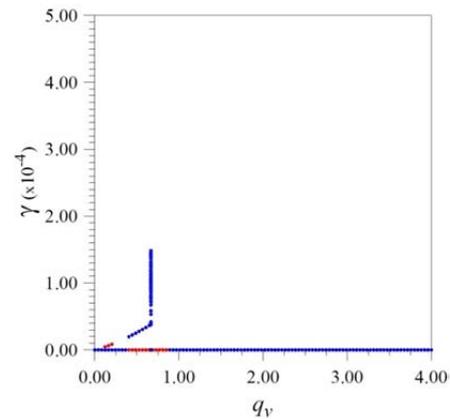
(a) Curva de ressonância em  $v$ (b) Salto dinâmico em  $v$ (c) Curva de ressonância em  $w$ (d) Salto dinâmico em  $w$ (e) Curva de ressonância em  $\gamma$ (f) Salto dinâmico em  $\gamma$ 

Figura 3.15 – Diagramas de bifurcação para viga com seção transversal retangular,  $\Omega = 3,72$ , amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_w = 0,0$  e  $q_v$  variável.

Observa-se que, diminuindo a magnitude da solicitação  $q_v$ , as rotações devidas à torção da viga tornam-se menos importantes. Em consequência, os efeitos das não linearidades na resposta da viga também diminuem e os deslocamentos oriundos do acoplamento modal tendem a desaparecer, o que

ocorre para  $q_v = 0,025$ . Nota-se que, para magnitude da solicitação  $q_v \geq 0,3$ , os deslocamentos medidos são maiores que a unidade e, portanto, fisicamente incoerentes.

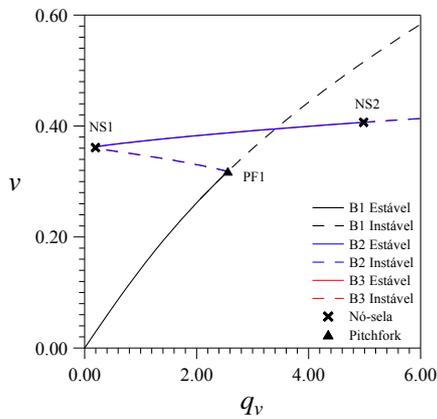
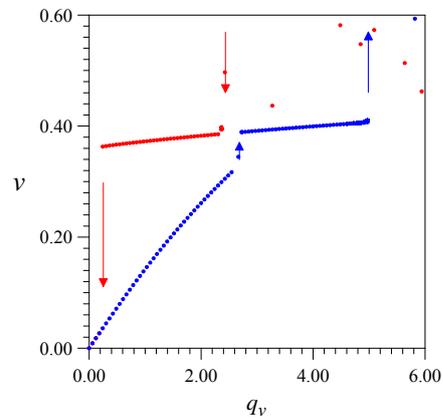
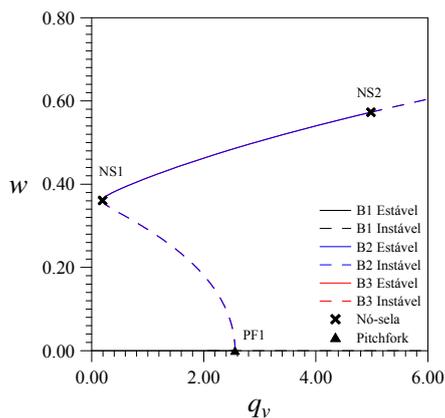
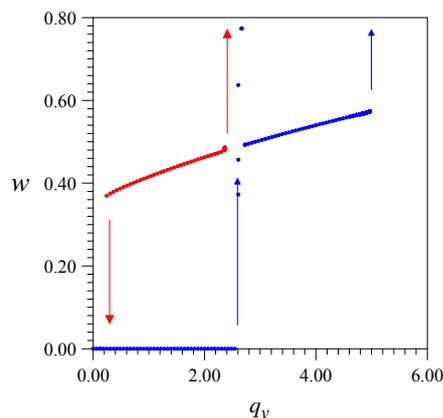
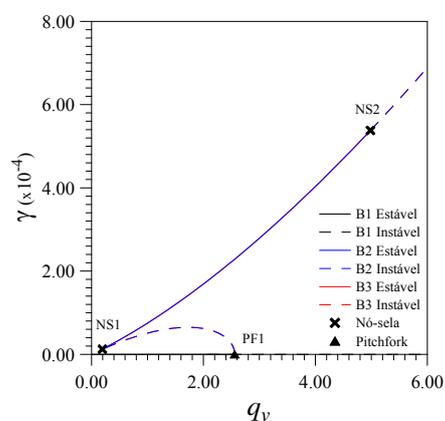
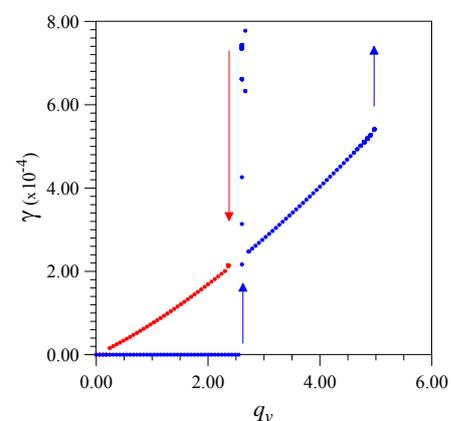
(a) Curva de ressonância em  $v$ (b) Salto dinâmico em  $v$ (c) Curva de ressonância em  $w$ (d) Salto dinâmico em  $w$ (e) Curva de ressonância em  $\gamma$ (f) Salto dinâmico em  $\gamma$ 

Figura 3.16 – Diagramas de bifurcação para viga com seção transversal retangular,  $\Omega = 4,20$ , amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_w = 0,0$  e  $q_v$  variável.

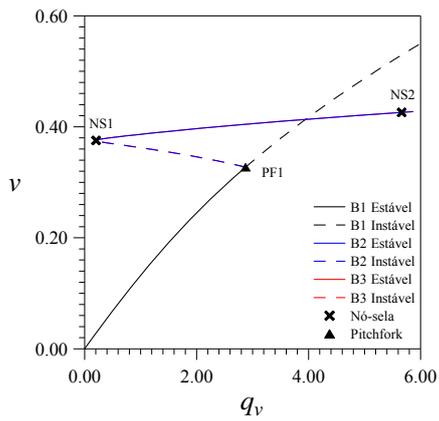
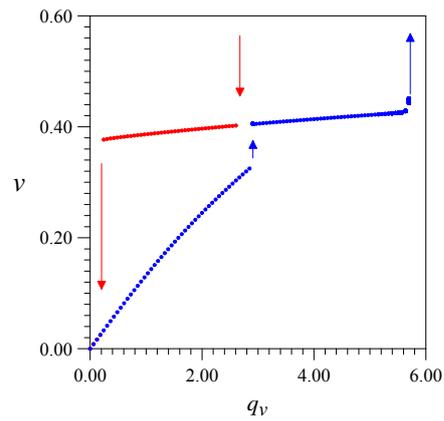
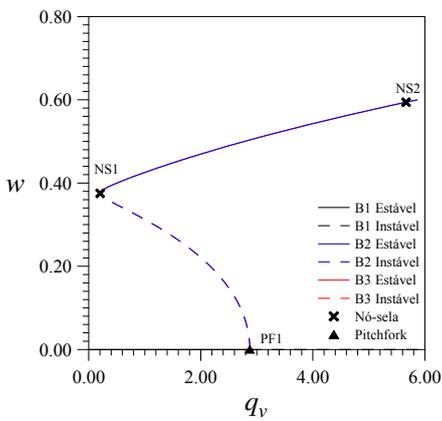
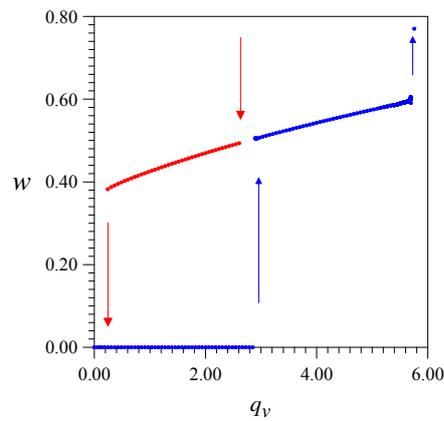
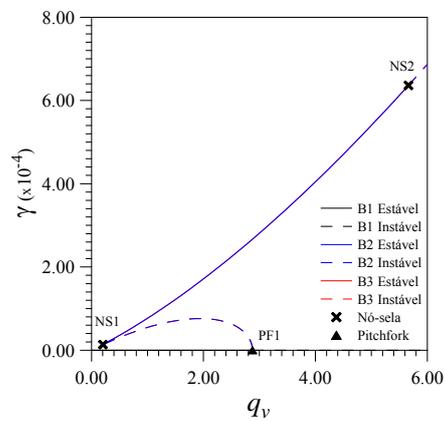
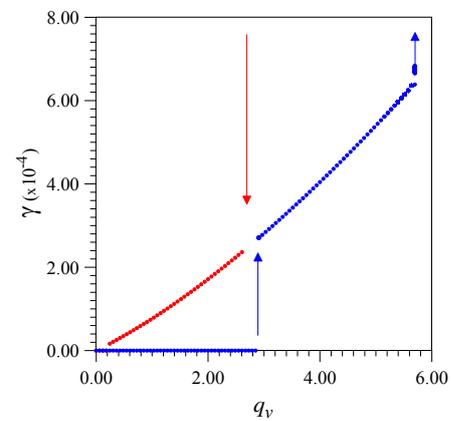
(a) Curva de ressonância em  $v$ (b) Salto dinâmico em  $v$ (c) Curva de ressonância em  $w$ (d) Salto dinâmico em  $w$ (e) Curva de ressonância em  $\gamma$ (f) Salto dinâmico em  $\gamma$ 

Figura 3.17 – Diagramas de bifurcação para viga com seção transversal retangular,  $\Omega = 4,25$ , amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_w = 0,0$  e  $q_v$  variável.

### 3.4.

#### Vibração forçada amortecida – flexão oblíqua

Na literatura, a análise deste problema tem se restringido a excitações

atuantes apenas na direção de um dos eixos principais de inércia da seção transversal. Entretanto, observa-se em Orlando (2010) que, em estruturas com interação modal, a direção do carregamento tem uma influência marcante nas bifurcações e multiplicidade de soluções. Razão esta que motiva o seu estudo nesta seção do trabalho.

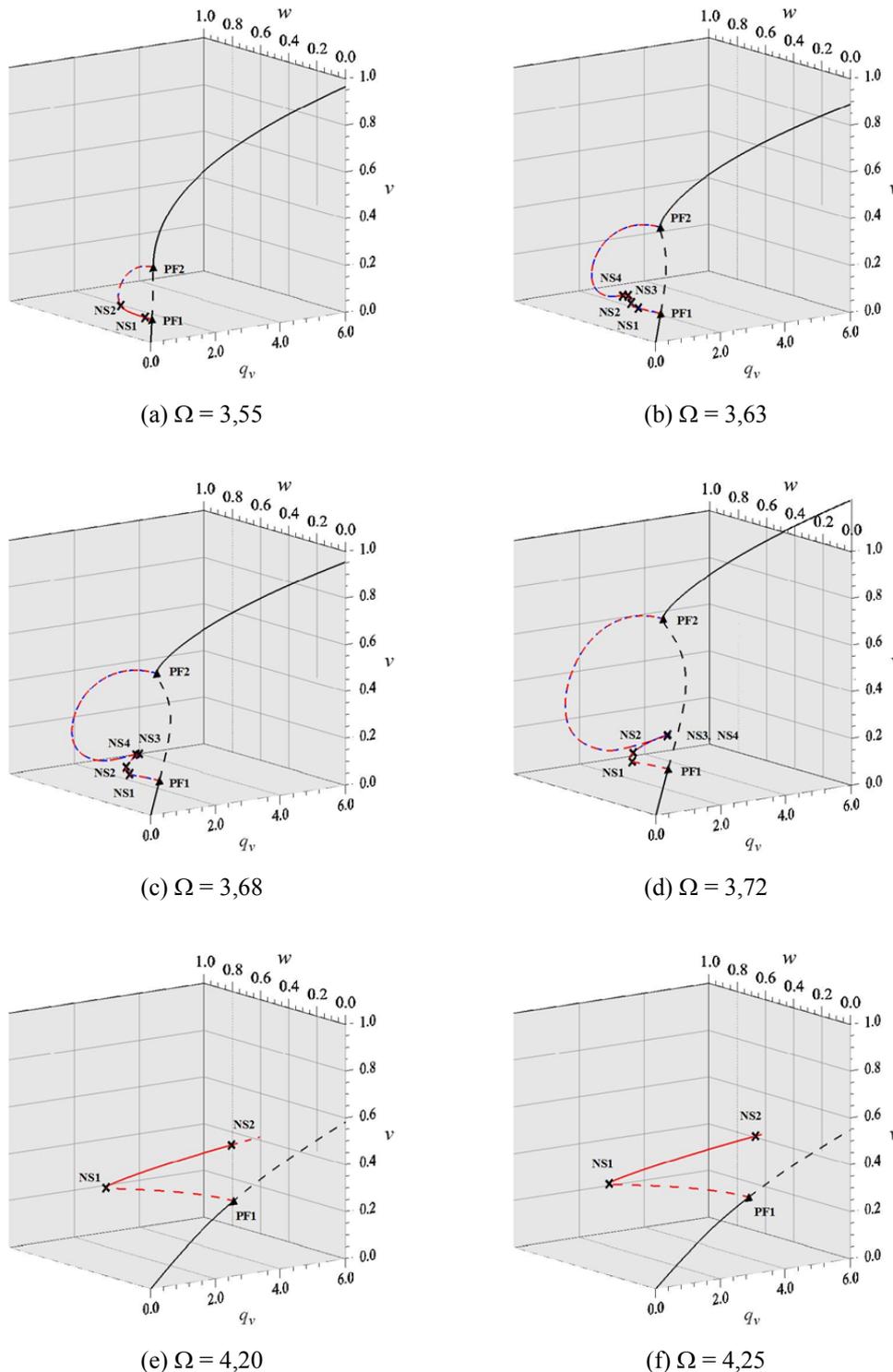


Figura 3.18 – Influência da frequência da excitação nos diagramas de bifurcação.

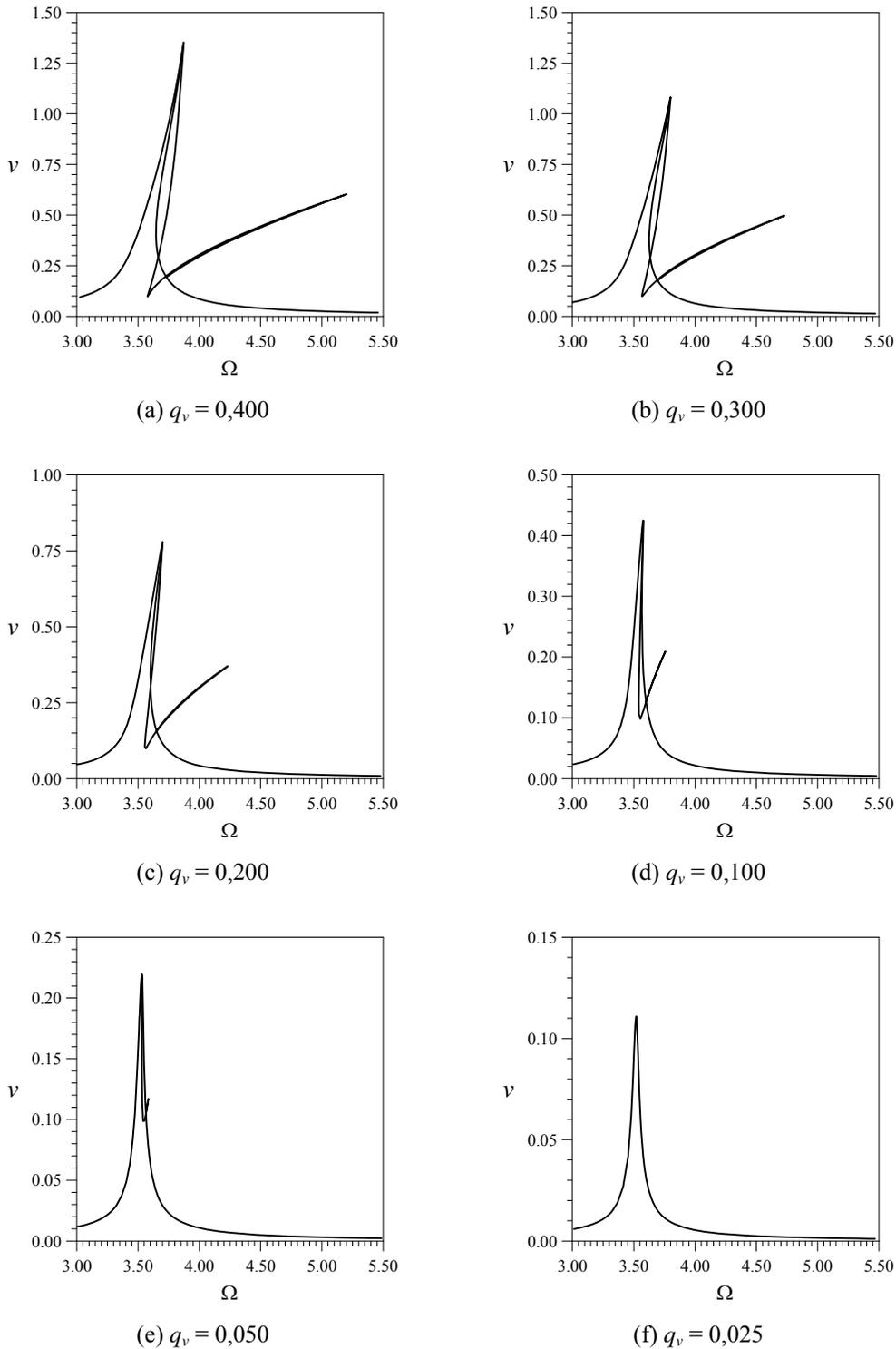


Figura 3.19 – Influência da magnitude da carga nos diagramas de bifurcação. Amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e  $q_v$  variável. Variável de estado  $v$ .

Em virtude das simetrias da seção quadrada, varia-se a direção da excitação entre  $0^\circ$  e  $45^\circ$ , dividindo para tanto o carregamento distribuído harmônico em duas componentes, uma atuante na direção  $Y$  e outra na direção  $Z$ . Tomando a barra engastada-livre com razão  $L/b = 25$ , assume-se inicialmente,  $q_v = q_w =$

0,1414213562, quer dizer, assume-se uma solicitação lateral cuja resultante possui  $45^\circ$  de inclinação com respeito ao plano  $XY$ . Para efeito de comparação a magnitude da força permanece a mesma do caso anterior, ou seja, igual a  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,20$ .

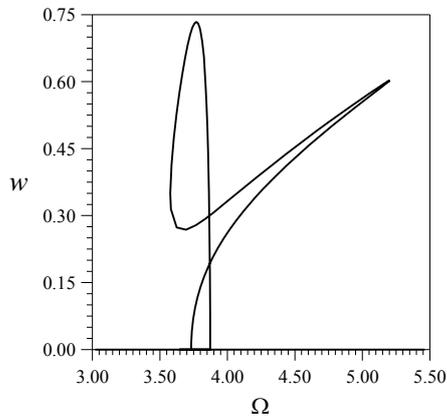
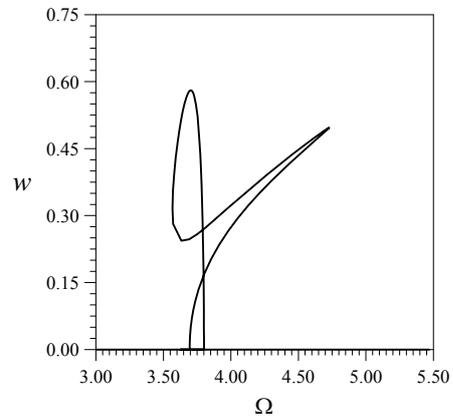
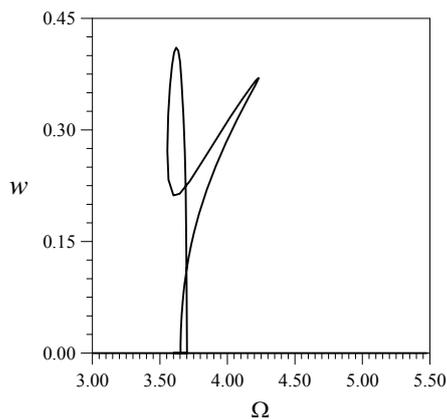
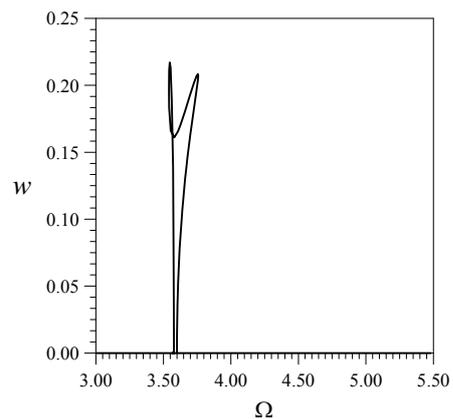
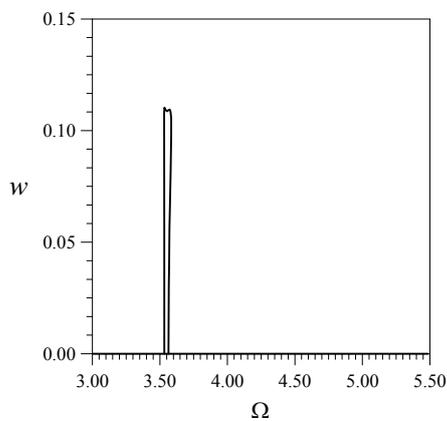
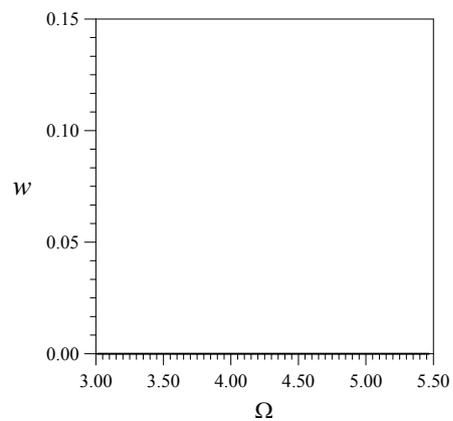
(a)  $q_v = 0,400$ (b)  $q_v = 0,300$ (c)  $q_v = 0,200$ (d)  $q_v = 0,100$ (e)  $q_v = 0,050$ (f)  $q_v = 0,025$ 

Figura 3.20 – Influência da magnitude da carga nos diagramas de bifurcação. Amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e  $q_v$  variável. Variável de estado  $w$ .

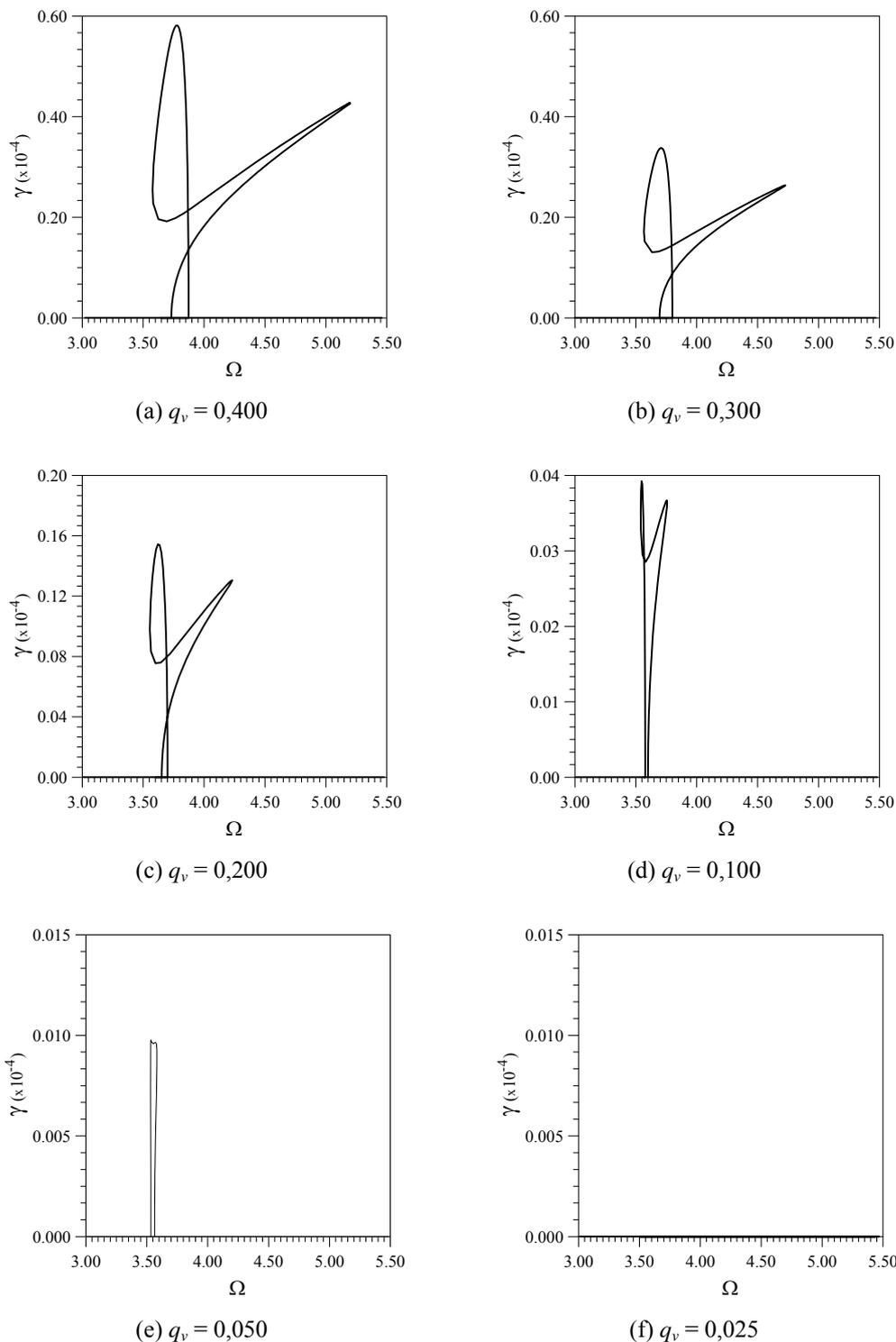


Figura 3.21 – Influência da magnitude da carga nos diagramas de bifurcação. Amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e  $q_v$  variável. Variável de estado  $\gamma$ .

Seguindo a metodologia utilizada para o estudo da resposta dinâmica da barra em flexão simples, apresenta-se na Figura 3.22 a variação dos máximos deslocamentos da barra como função da frequência de excitação lateral. Na Figura 3.23 apresentam-se os diagramas de bifurcação da Figura 3.22 no espaço

$v-w-\Omega$  e  $w-\gamma-\Omega$ , onde se podem observar melhor os diversos braços de soluções estáveis e instáveis na vizinhança das bifurcações.

Verifica-se na Figura 3.22 e Figura 3.23 que os diagramas de bifurcação para flexão oblíqua apresentam as mesmas bifurcações vistas na flexão simples. Nota-se que um braço de soluções periódicas estáveis evolui aumentando a amplitude dos deslocamentos e no ponto de máximo o ponto de bifurcação, PF1. Neste ponto, o braço de soluções periódicas estáveis torna-se instável e surgem dois novos braços de soluções periódicas instáveis (bifurcação *pitchfork* instável).

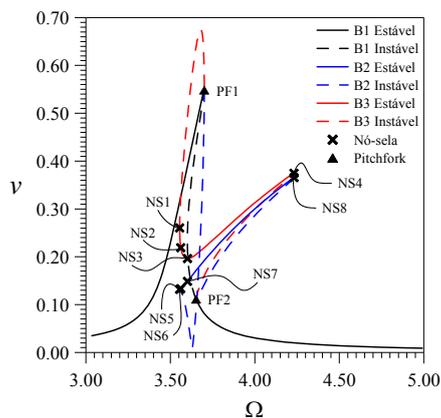
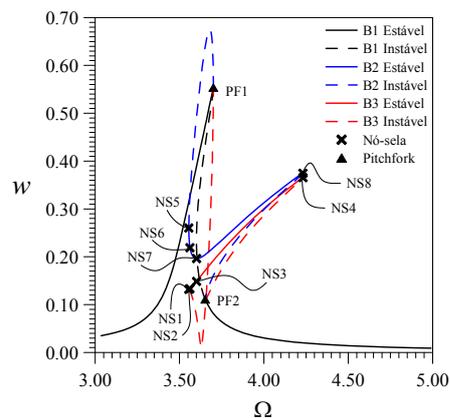
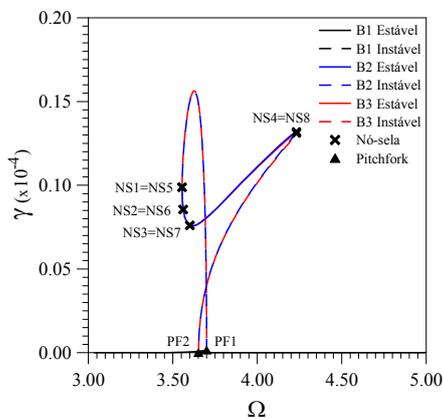
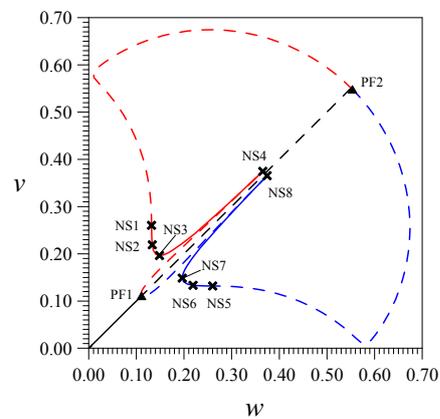
(a) Curva de ressonância em  $v$ (b) Curva de ressonância em  $w$ (c) Curva de ressonância em  $\gamma$ (d) Curva de ressonância no plano  $v-w$ 

Figura 3.22 – Diagramas de bifurcação para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_v = q_w = 0,14142135$

Antes destes três braços de soluções periódicas instáveis se unirem em um novo ponto de bifurcação, PF2, onde os dois braços de soluções não planares são destruídos e o braço de soluções planares continua, após a bifurcação, como um braço de soluções estáveis, verifica-se que cada novo braço de soluções periódicas não planares passa por quatro pontos limites (sela-nó). Em particular, observa-se

na Figura 3.22 que os deslocamentos  $v$  e  $w$ , em virtude da simetria da seção, apresentam as mesmas amplitudes e mesmo comportamento. Observa-se ainda que o ângulo de torção é nulo até que se atinja a região de ressonância, instante em que ele assume valores pequenos. Apesar de pequeno, o ângulo de torção não nulo é importante, pois indica a presença das soluções acopladas com movimento fora do plano da excitação.

Para facilitar a identificação dos diferentes braços de soluções estáveis, apresentam-se na Tabela 3.2 as coordenadas dos pontos de sela e de bifurcação que aparecem nos diagramas de bifurcação da Figura 3.22, os quais são rerepresentados na Figura 3.24.

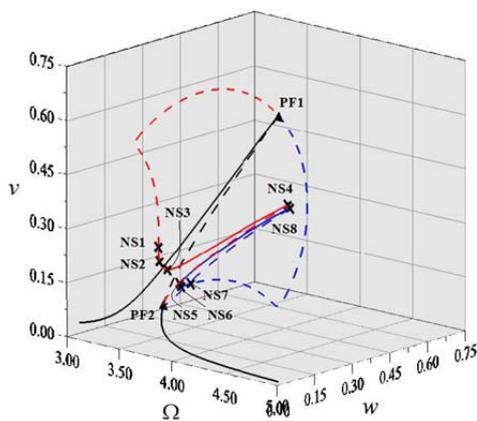
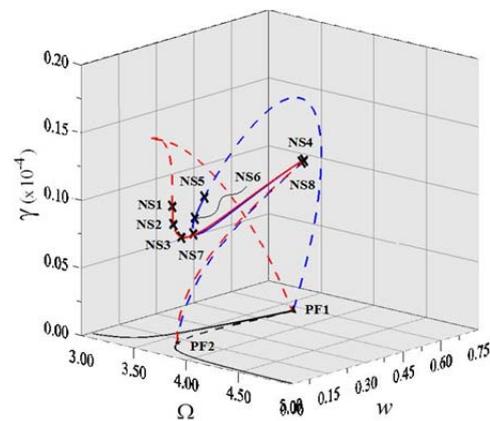
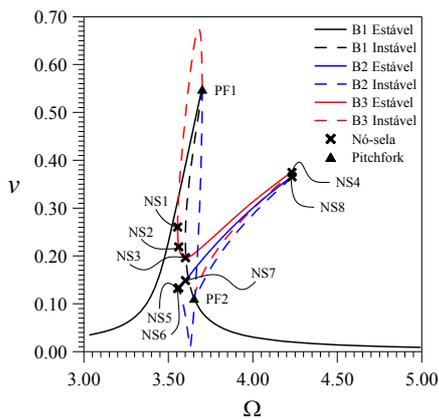
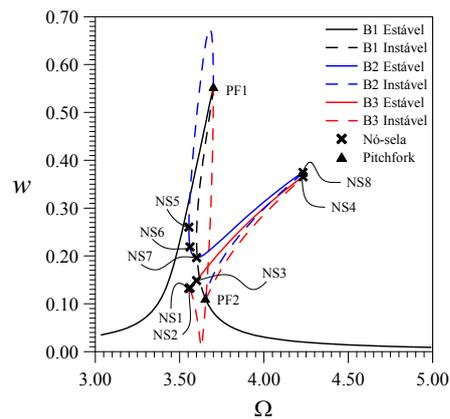
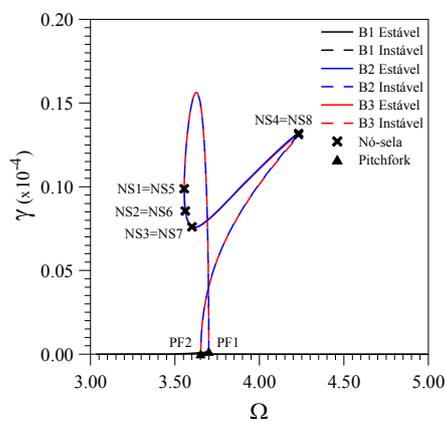
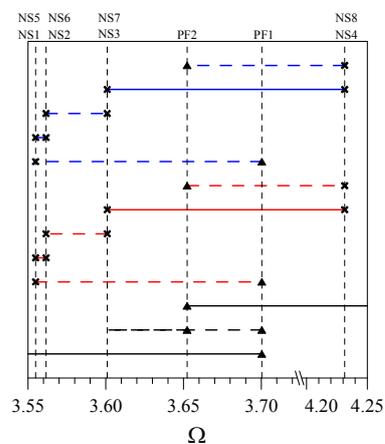
(a) Curva de ressonância em  $v-w-\Omega$ (a) Curva de ressonância em  $\gamma-w-\Omega$ 

Figura 3.23 – Detalhes do diagrama de bifurcações da Figura 3.22 na região de ressonância.

Tabela 3.2 – Coordenadas dos pontos limites e de bifurcação observados na Figura 3.24.

Ponto	$\Omega$	$v$	$w$	$\gamma$
PF 1	3.700313	0.548186	0.553505	1.5163E-07
PF 2	3.652288	0.110915	0.110915	2.8858E-09
NS 1	3.554873	0.260203	0.131877	9.8821E-06
NS 2	3.561593	0.219005	0.133295	8.5526E-06
NS 3	3.600912	0.196314	0.148537	7.6017E-06
NS 4	4.231362	0.374546	0.365349	1.3109E-05
NS 5	3.554873	0.131874	0.260201	9.8782E-06
NS 6	3.561594	0.133296	0.219002	8.5524E-06
NS 7	3.600890	0.148529	0.196317	7.6049E-06
NS 8	4.231362	0.365359	0.374564	1.3192E-05

(a) Curva de ressonância em  $v$ (b) Curva de ressonância em  $w$ (c) Curva de ressonância em  $\gamma$ 

(d) Superposição das soluções estáveis

Figura 3.24 – Superposição dos braços de soluções estáveis para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_v = q_w = 0,14142135$

Em especial, na Figura 3.24.d, mostram-se as faixas de frequência associadas a cada braço de soluções, bem como a superposição das soluções estáveis, existindo faixas de frequência com até 4 soluções estáveis coexistentes, o que acusa a possibilidade de ocorrerem saltos dinâmicos com a variação da frequência de excitação.

Na Figura 3.25 mostram-se os diagramas de bifurcação obtidos através do algoritmo de força bruta, os quais identificam apenas as soluções estáveis e permite identificar os saltos dinâmicos à medida que se cresce (em azul) ou decresce (em vermelho) a frequência da excitação.

Dando continuidade ao estudo das bifurcações e multiplicidade de soluções presentes no comportamento dinâmico da barra engastada-livre sujeita a flexão oblíqua, apresenta-se na Figura 3.27 a resposta no tempo e os correspondentes

planos de fase e mapas de Poincaré considerando uma solicitação com frequência de excitação  $\Omega = 3,68$ , indicada na Figura 3.26.

Por meio da Figura 3.27 é possível observar a existência de quatro soluções periódicas estáveis para  $\Omega = 3,68$ , sendo duas no plano do carregamento (torção nula), uma ressonante de maior amplitude (curva na cor preta) e a não ressonante de menor amplitude (curva na cor verde) e duas fora do plano do carregamento, (curvas na cor vermelha e azul – torção não nula), ocorrendo entre ambas apenas uma diferença de fase. Na Figura 3.27 verifica-se, ainda, que todas as soluções são de período  $1T$  (um ponto na seção de Poincaré), ou seja, vibram com a frequência da excitação. Na Figura 3.28, apresentam-se quatro seções da bacia de atração para a frequência de excitação  $\Omega = 3,68$ .

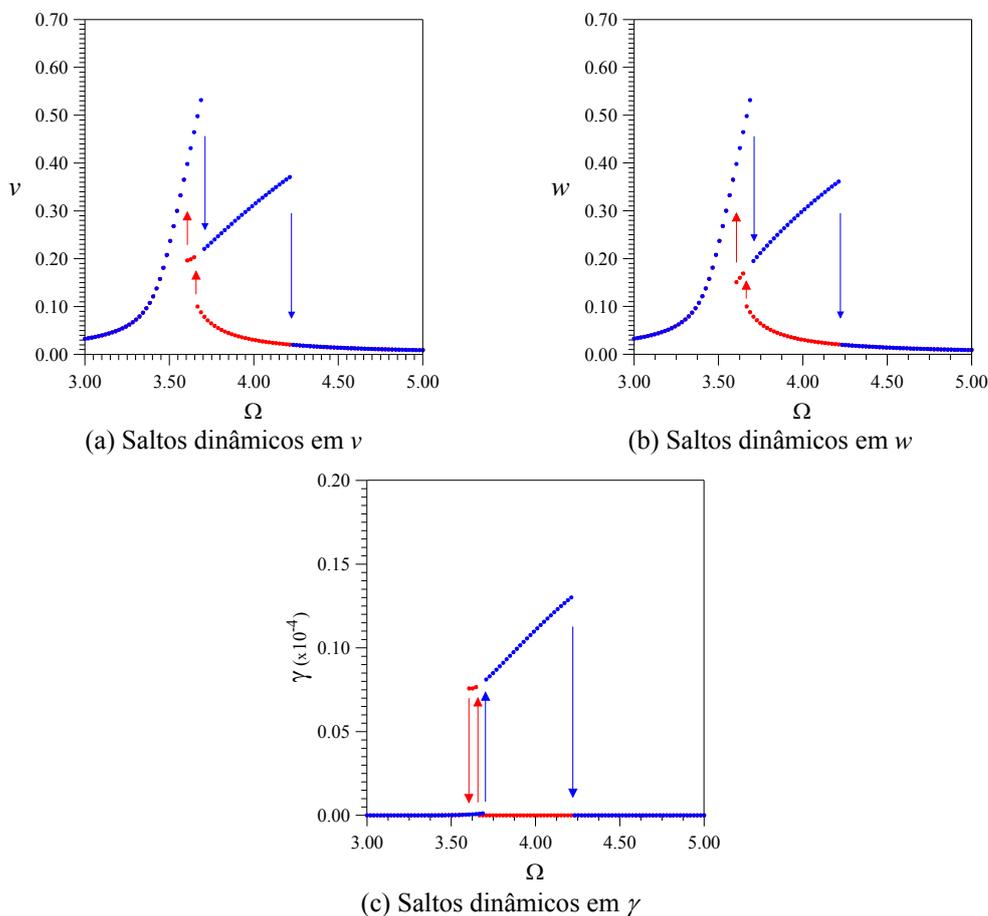
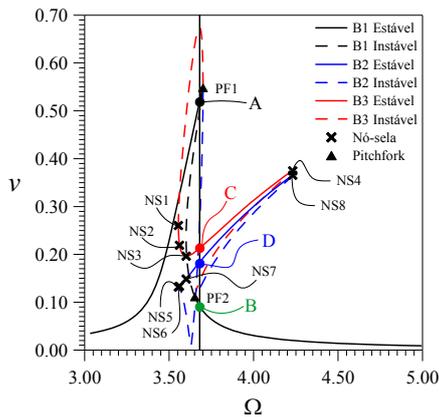
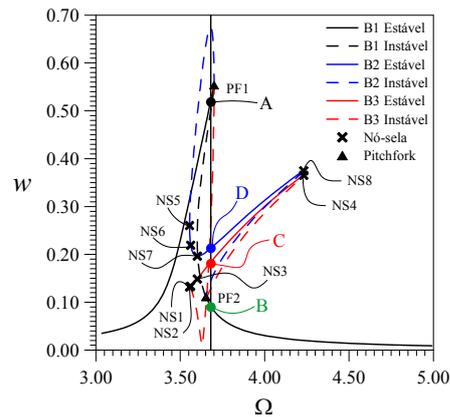
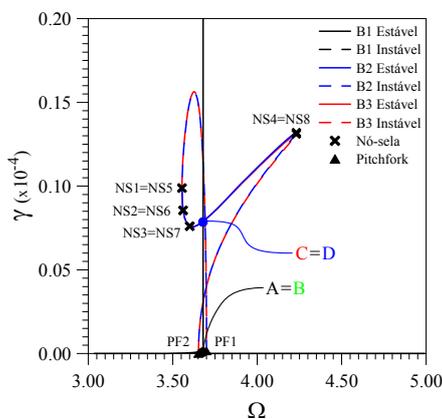
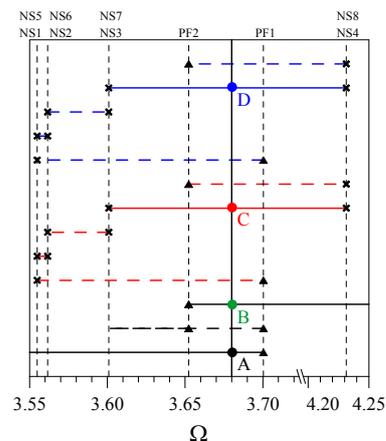


Figura 3.25 – Saltos dinâmicos para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_v = q_w = 0,14142135$ .

Nas seções da bacia de atração observam-se quatro regiões distintas associadas aos quatro tipos distintos de comportamento, são elas: a) região preta – solução planar de maior amplitude de vibração (atrator A na Figura 3.26); b) região verde – solução planar de menor amplitude de vibração (atrator B

na Figura 3.26); c) região vermelha – solução não planar devida à interação modal (atrator C na Figura 3.26); d) região azul – solução não planar devida à interação modal (atrator D na Figura 3.26). Olhando para as regiões associadas às soluções não triviais, nota-se que existe uma bacia contínua rodeando cada atrator, mas que, para grandes perturbações, a bacia passa a ter uma estrutura fractal, indicando sensibilidade a perturbações iniciais.

(a) Curva de ressonância em  $v$ (b) Curva de ressonância em  $w$ (c) Curva de ressonância em  $\gamma$ 

(d) Superposição das soluções estáveis

Figura 3.26 – Seção investigada nos diagramas de bifurcação da barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e solicitações  $q_v = q_w = 0,14142135$

Em adição, apresenta-se na Figura 3.29 e Figura 3.30 a evolução dos diagramas de bifurcação em função da direção da excitação, desde a flexão simples ( $0^\circ$  de inclinação) até a flexão oblíqua a  $45^\circ$ . Por conveniência, nestes diagramas, os pontos limites foram omitidos. Nota-se que para todos os ângulos têm-se as mesmas bifurcações. Para um ângulo diferente de  $0^\circ$  o deslocamento  $w$  é não nulo para qualquer valor de  $\Omega$  e cresce à medida que aumenta este ângulo.

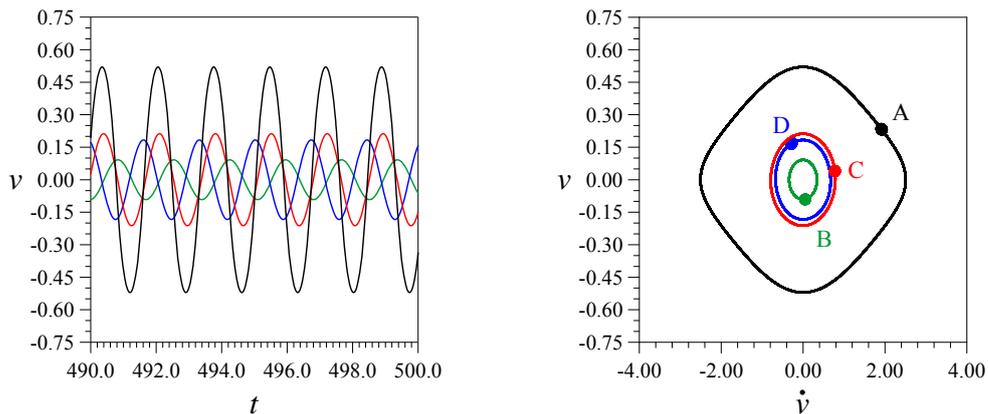
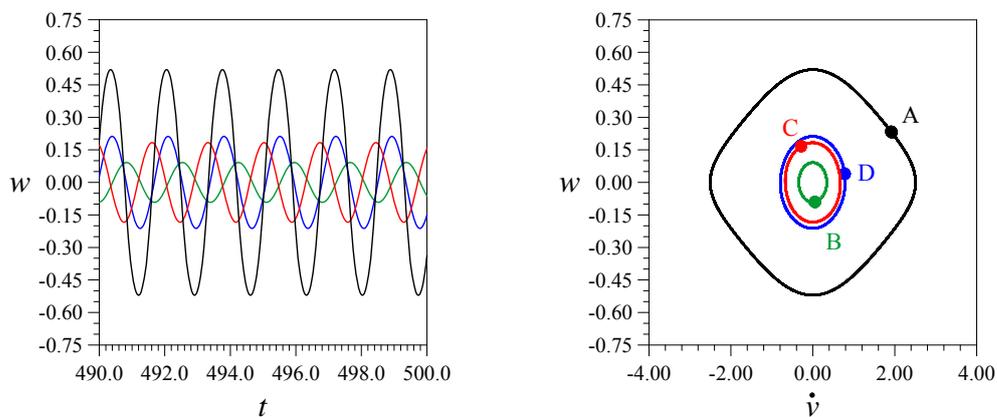
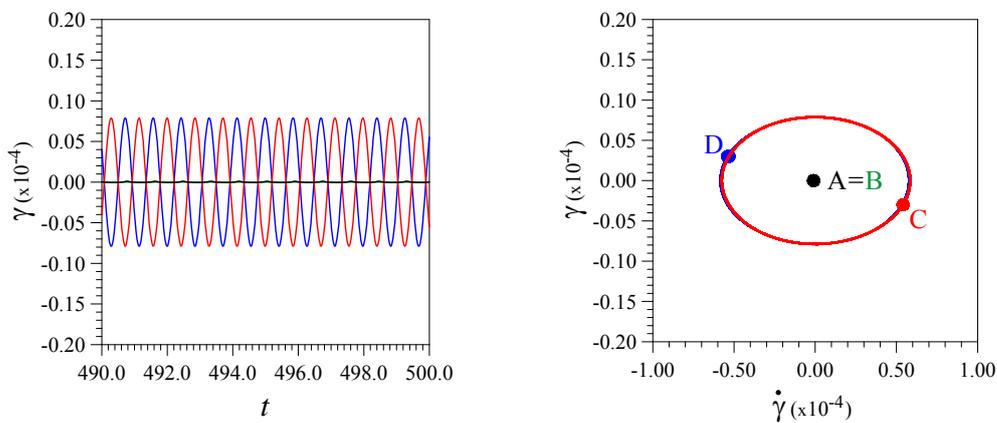
(a) Deslocamento  $v$  – Velocidade  $\dot{v}$ (b) Deslocamento  $w$  – Velocidade  $\dot{w}$ (c) Deslocamento  $\gamma$  – Velocidade  $\dot{\gamma}$ .

Figura 3.27 – Resposta no tempo e plano de fase para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ , solicitações  $q_v = q_w = 0,14142135$   $q_v = q_w = 0.14142135$  62 e frequência  $\Omega = 3,68$ .

Em todos os casos o ângulo de torção,  $\gamma$ , só existe na região de ressonância dando origem às oscilações fora do plano da excitação, embora se conserve com pequena amplitude. Nota-se ainda que para  $0^\circ$  tem-se um caso degenerado onde há a coincidência dos dois caminhos que emergem do ponto de bifurcação *pitchfork*.

Quando se considera um pequeno ângulo, nota-se de forma clara a presença dos dois caminhos independentes característicos de uma bifurcação por quebra de simetria.

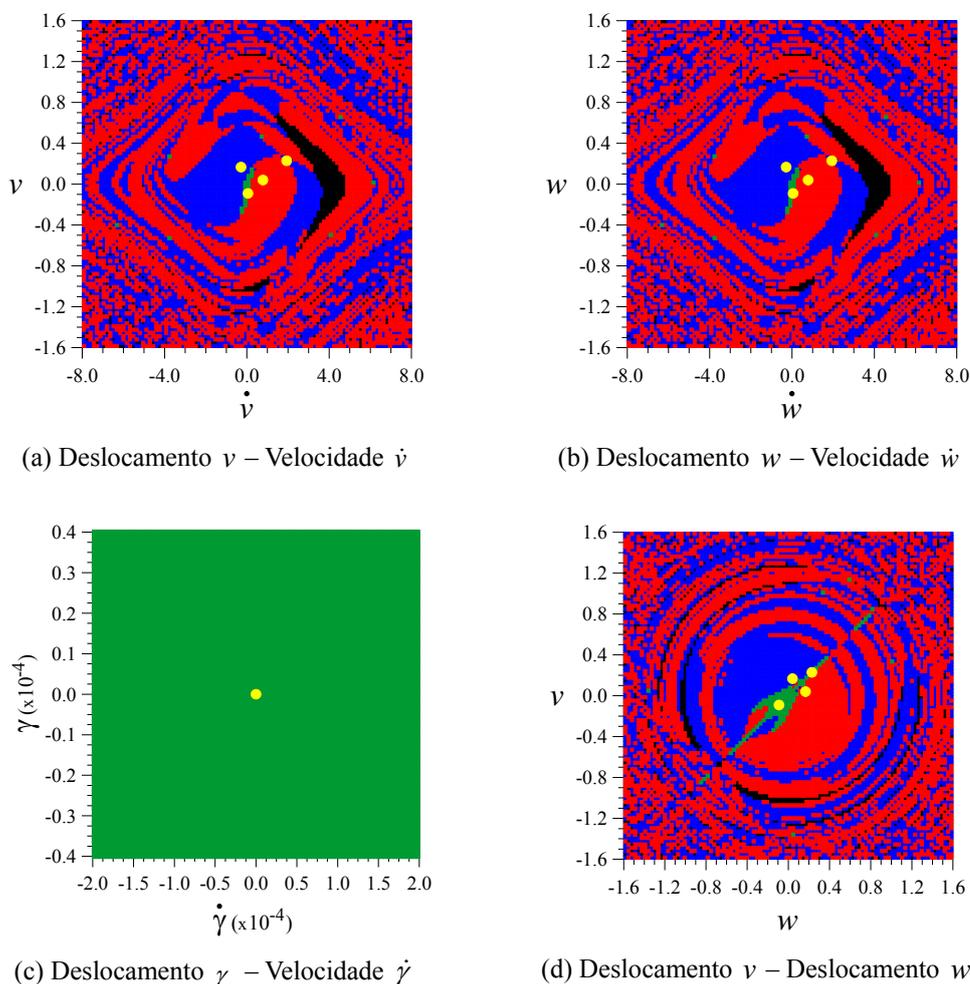


Figura 3.28 – Bacias de atração para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ , solicitações  $q_v = q_w = 0,14142135$  e frequência  $\Omega = 3,68$ .

Finalmente, apresentam-se na Figura 3.31 e Figura 3.32 os diagramas de bifurcações, no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $\Omega$  e  $v$  vs.  $w$  vs.  $\gamma$ , para um carregamento lateral com inclinação de  $22,5^\circ$  e valores crescentes da magnitude da carga. Nota-se que para  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,025$  (Figura 3.31.a) a inclinação da carga não é suficiente para induzir movimentos acoplados significativos, os quais já podem ser observados na Figura 3.31.b onde  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,05$ . As mesmas bifurcações se mantêm nos diagramas seguintes (Figura 3.31.c e Figura 3.31.d), isto é, para  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,100$  e  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,2$ , com aumento nas amplitudes dos deslocamentos  $v$  e  $w$ , o que também se verifica para o ângulo de torção  $\gamma$  nos diagramas de bifurcação da Figura 3.32.

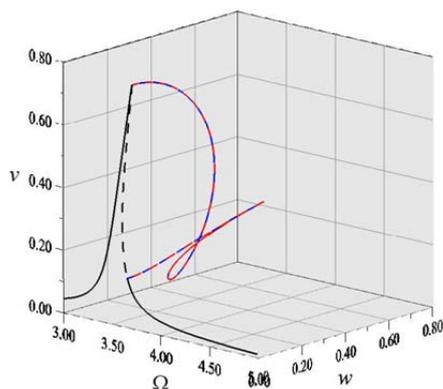
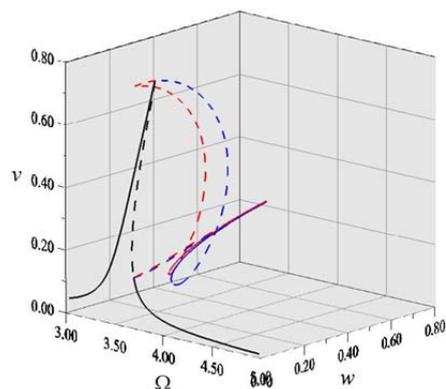
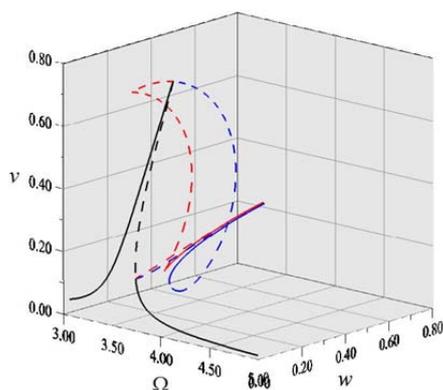
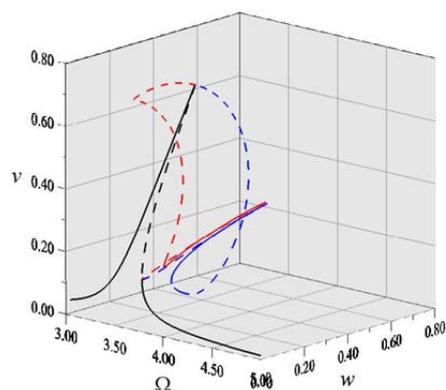
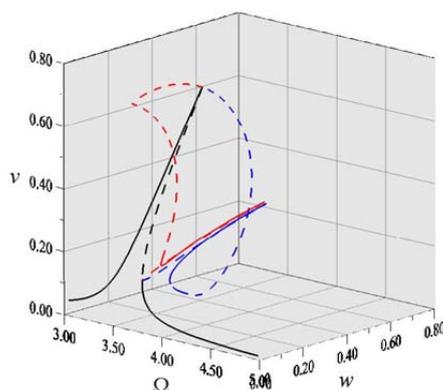
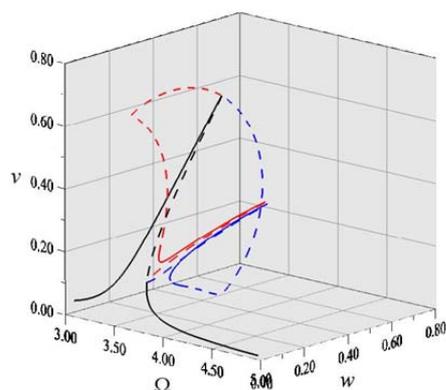
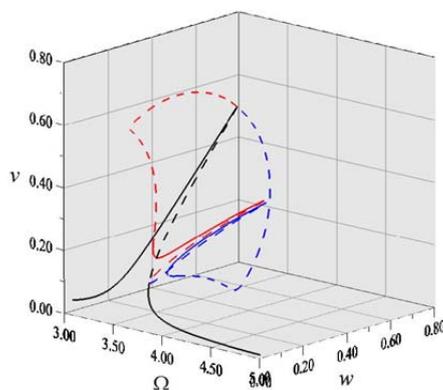
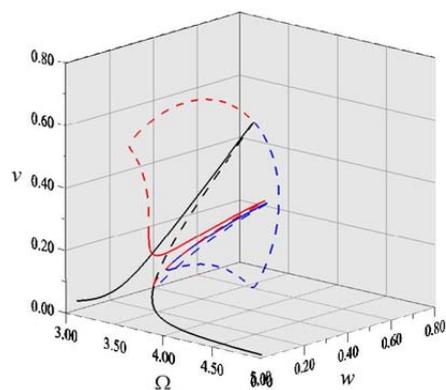
(a)  $0^\circ$ (b)  $7^\circ$ (c)  $14^\circ$ (d)  $21^\circ$ (c)  $24^\circ$ (d)  $31^\circ$ (c)  $38^\circ$ (d)  $45^\circ$ 

Figura 3.29 – Evolução dos diagramas de bifurcações no espaço  $v-w-\Omega$ , para barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e direção resultante do carregamento variando de  $0^\circ$  à  $45^\circ$ .

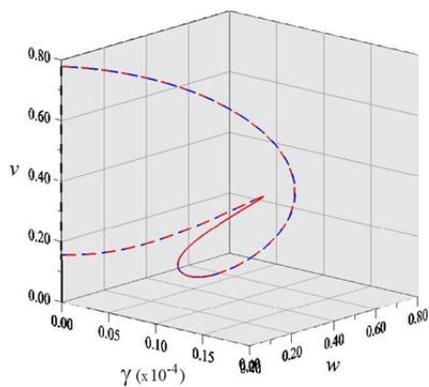
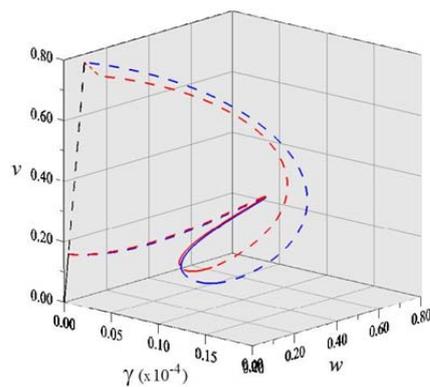
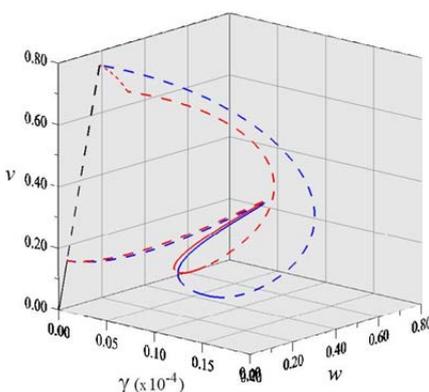
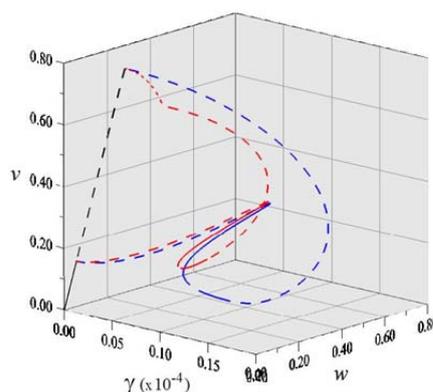
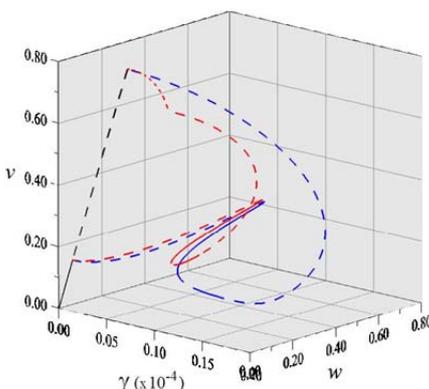
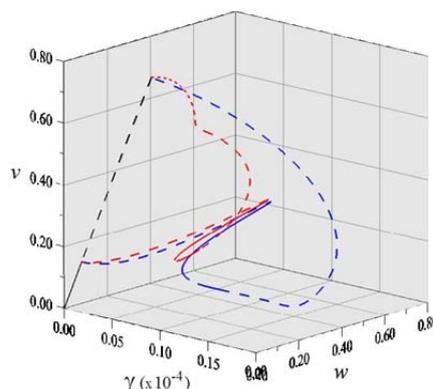
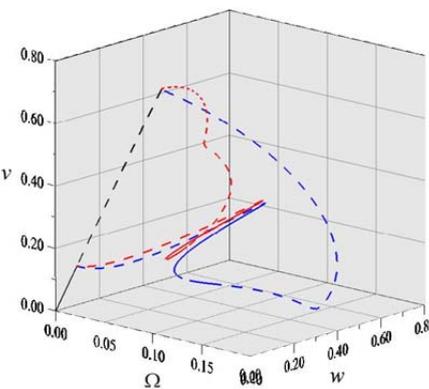
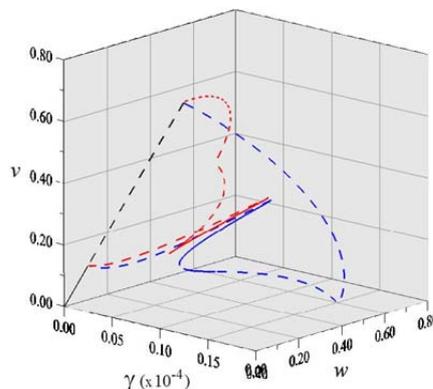
(a)  $0^\circ$ (b)  $7^\circ$ (c)  $14^\circ$ (d)  $21^\circ$ (c)  $24^\circ$ (d)  $31^\circ$ (c)  $38^\circ$ (d)  $45^\circ$ 

Figura 3.30 – Evolução dos diagramas de bifurcações no espaço  $v-w-\gamma$ , para a barra com amortecimento  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e direção resultante do carregamento variando de  $0^\circ$  à  $45^\circ$ .

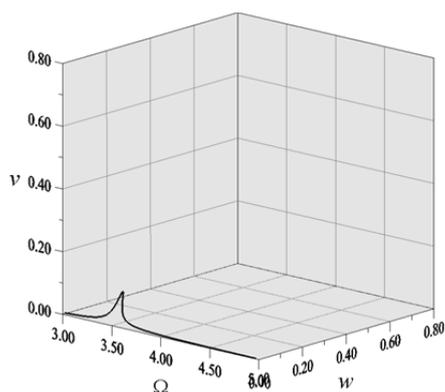
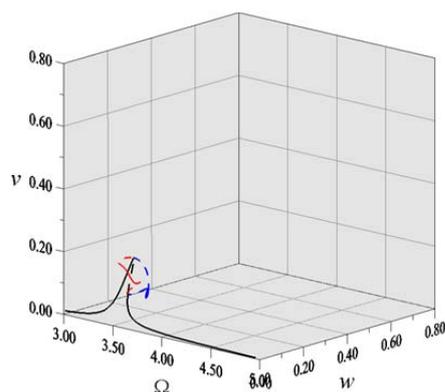
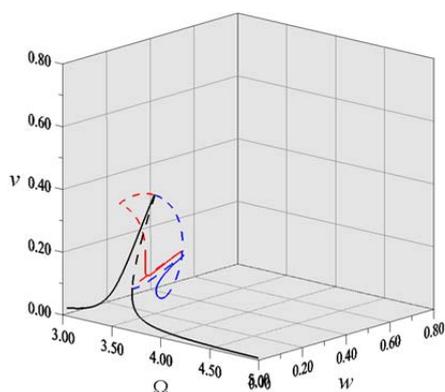
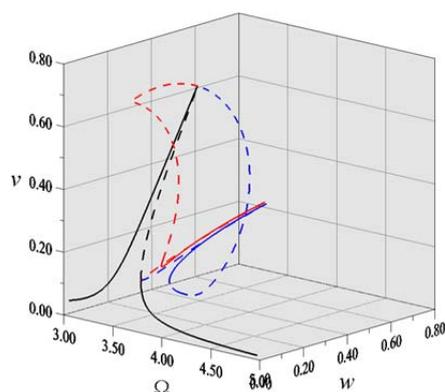
(a)  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,025$ (b)  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,050$ (c)  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,100$ (d)  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,200$ 

Figura 3.31 - Diagrama de bifurcações no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $\Omega$   $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e diferentes magnitudes da força resultante  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5}$  a  $22,5^\circ$ .

O mesmo comportamento é observado nos diagramas de bifurcações da Figura 3.33 e Figura 3.34, onde se considera o carregamento lateral resultante com  $45^\circ$  de inclinação. Cabe destacar que os resultados até aqui apresentados são dependentes do grau de amortecimento definido para a estrutura. A Figura 3.35 ilustra a influência do amortecimento no diagrama de bifurcações. Verifica-se que a medida que o amortecimento decresce, vibrações não planares são observadas para valores cada vez menores de carregamento. Assim, para barras metálicas esbeltas que exibem baixo nível de amortecimento, oscilações não planares podem ser observadas mesmo que o carregamento seja de pequena magnitude.

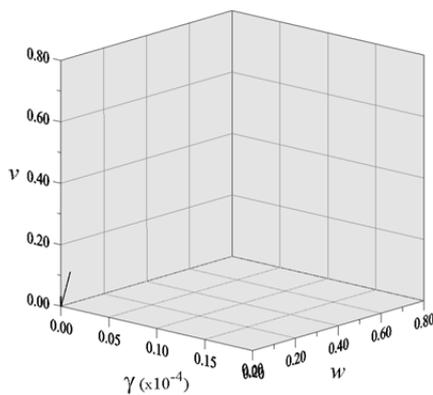
### 3.5.

#### Efeito da assimetria da seção transversal

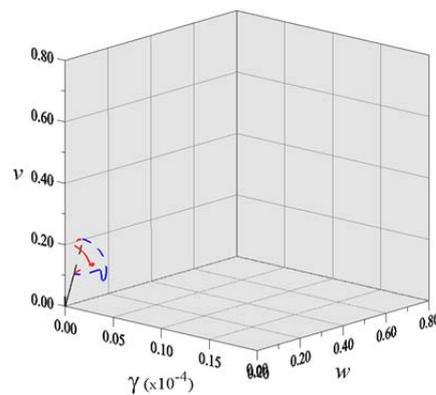
No item anterior confirmou-se que, em estruturas com interação modal, a direção do carregamento tem influência marcante nas bifurcações e multiplicidade

de soluções (Orlando, 2010; Gavassoni, 2012). Segundo Orlando (2010), outro fator importante são as possíveis simetrias associadas ao sistema estrutural, razão esta que motiva o estudo da influência da assimetria da seção transversal nas bifurcações e multiplicidade de soluções.

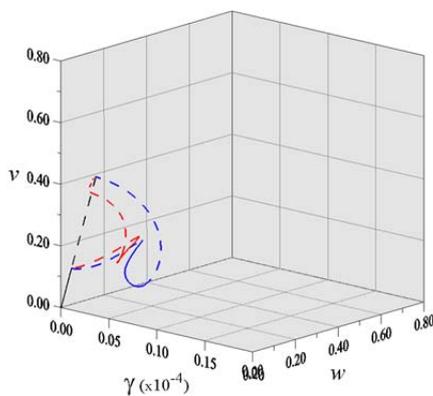
Para entender este efeito consideram-se três casos: (a)  $a/b = 1,00$ , (b)  $a/b = 0,99$  e (c)  $a/b = 1,01$ . Ressalta-se que, para facilitar comparações e evidenciar particularidades, alguns dos resultados obtidos nas seções anteriores (barra em flexão simples e oblíqua) são rerepresentados a seguir.



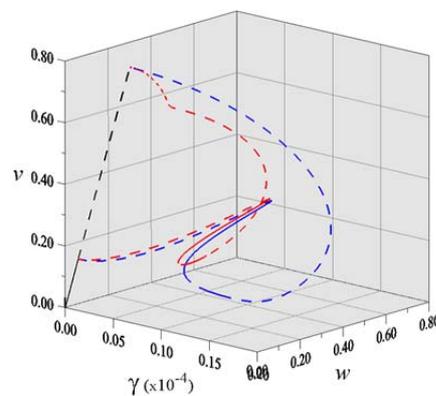
(a)  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,025$



(b)  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,050$



(c)  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,100$



(d)  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,200$

Figura 3.32 - Diagrama de bifurcações no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $\gamma$  para  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e diferentes magnitudes da força resultante  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5}$  à  $22,5^\circ$ .

Para os três casos citados, as amplitudes modais normalizadas são  $C_v = 1,00$ ,  $C_w = 1,00$  e  $C_\gamma = 1,414214$ . Ademais, na Tabela 3.3 apresentam-se as propriedades geométricas das barras e a menor frequência natural associada a cada modo de vibração. Nela, verifica-se que, para a seção quadrada (Caso a), as duas frequências de vibração relativas aos modos de flexão são iguais, levando a uma ressonância interna 1:1. Observa-se também que pequenas variações nas

dimensões da seção transversal (casos b e c) funcionam como um parâmetro de quebra de simetria (*detuning parameter*), levando a uma pequena diferença entre as duas frequências de flexão.

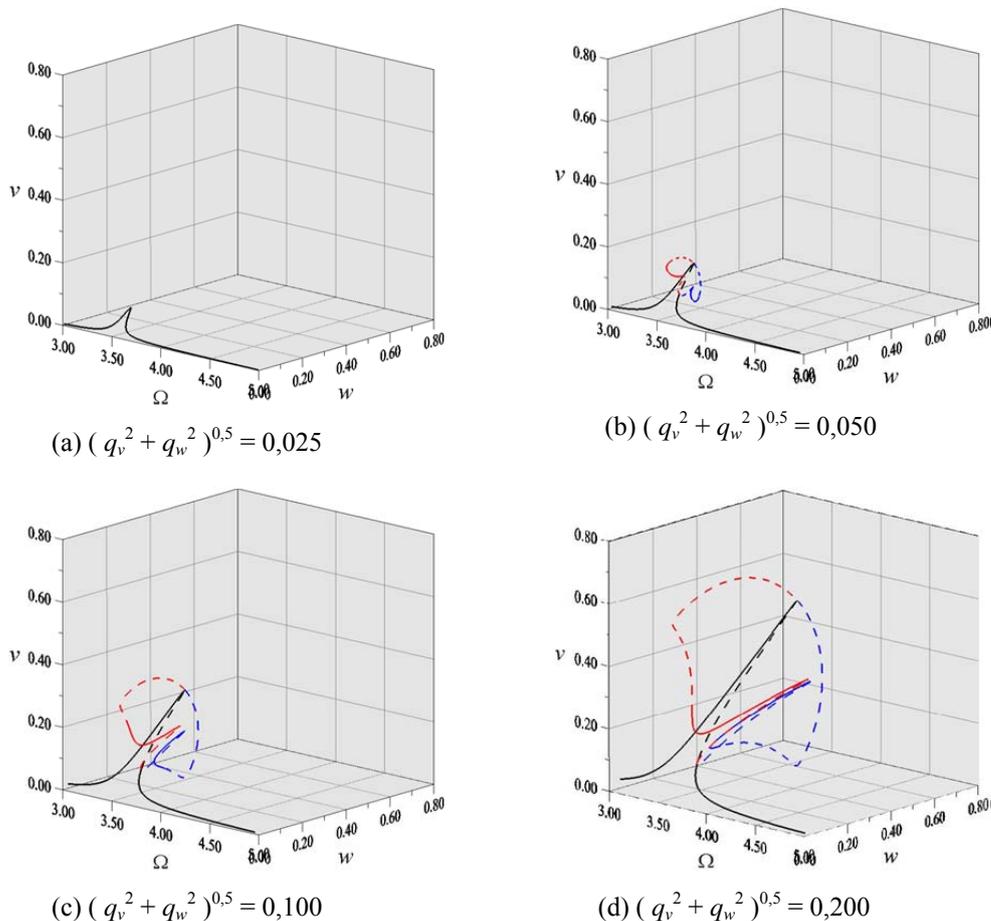


Figura 3.33 - Diagrama de bifurcações no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $\Omega$  para  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e diferentes magnitudes da força resultante  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5}$  à  $45,0^\circ$ .

Tabela 3.3 – Propriedades geométricas e frequências naturais de vibração.

Propriedades	Casos		
	(a) $a/b = 1,00$	(b) $a/b = 0,99$	(c) $a/b = 1,01$
Momento de inercia, $J_\eta$	0.000133	0.000133	0.000133
Momento de inercia, $J_\zeta$	0.000133	0.000131	0.000136
Momento de inercia, $J_\xi$	0.000266	0.000264	0.000269
Parâmetro adimensional, $\beta_y$	1.000000	0.980100	1.020100
Parâmetro adimensional, $\beta_\gamma$	0.643810	0.636564	0.651120
Frequência de flexão, $\omega_v$	3.516216	3.481054	3.551379
Frequência de flexão, $\omega_w$	3.516216	3.516212	3.516220
Frequência de torção, $\omega_\gamma$	77.181677	77.130820	77.231520

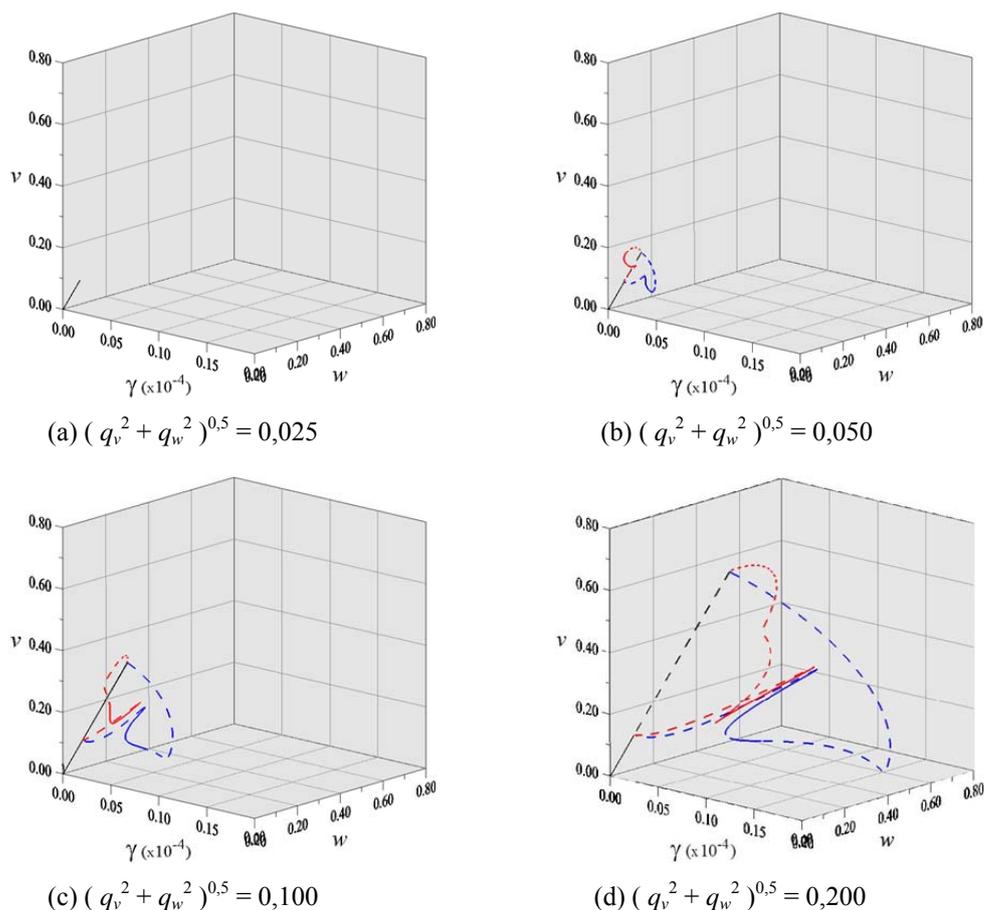
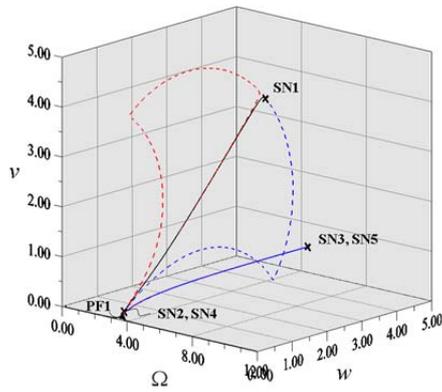
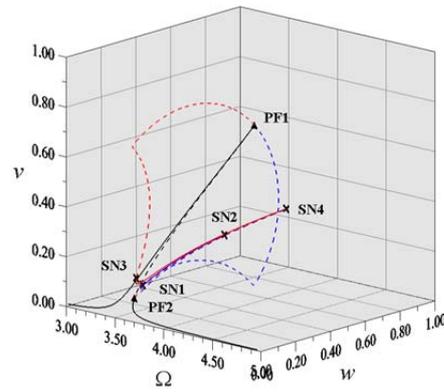
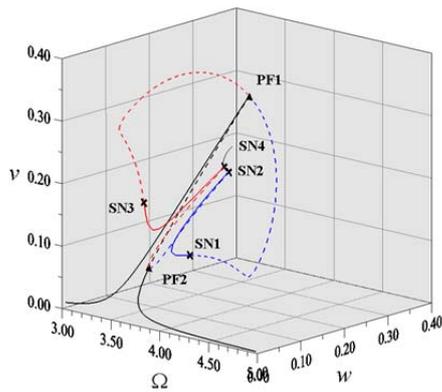
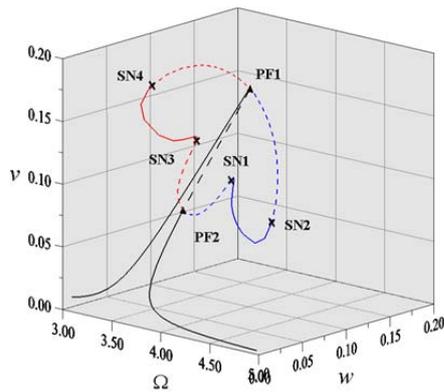


Figura 3.34 - Diagrama de bifurcações no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $\gamma$  para  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$  e valores crescentes de  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5}$  à  $45,0^\circ$ .

As Figura 3.36 e Figura 3.37 apresentam os diagramas de bifurcação respectivamente no espaço  $(v - w - \Omega)$  e  $(w - \gamma - \Omega)$  para três diferentes direções da excitação ( $0^\circ$ ,  $22,5^\circ$  e  $45,0^\circ$  com respeito ao plano XY). A magnitude da excitação harmônica lateral é  $(q_v + q_w)^{0,5} = 0.20$  e os coeficientes de amortecimento viscoso adotados são  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ . Na Figura 3.36.a, Figura 3.36.d e Figura 3.36.g ( $0^\circ$ ), as curvas pretas correspondem a vibrações na direção da excitação (o deslocamento  $w$  e o ângulo de torção  $\gamma$  são nulos). Estas correspondem, portanto, à curva clássica de ressonância obtida quando a acoplamento flexão-flexão-torção não é considerado, levando a uma equivocada descrição das oscilações.

Se o acoplamento modal é considerado, dois novos braços de soluções aparecem (vermelho e azul) devido aos pontos de bifurcação do tipo pitchfork PF1 e PF2, os quais são coincidentes para barra com razão  $a/b = 1.00$ , justamente pela simetria da seção transversal em relação à direção do carregamento. Estes novos braços de soluções correspondem ao movimento fora do plano, ou seja, o deslocamento  $w$  e o ângulo de torção  $\gamma$  são excitados pelo acoplamento flexão-

flexão-torção. Ao longo destes braços de solução fora do plano alguns trechos de soluções estáveis são detectados: de SN1 = SN5 à SN2 = SN6 e SN3 = SN7 à SN4 = SN8 para  $a/b = 1,00$ , de SN3 = SN5 à SN4 = SN6 para  $a/b = 0,99$  e de PF1 à SN1 = SN4 e entre SN2 = SN5 à SN3 = SN6 para  $a/b = 1,01$ . Isto leva a vários atratores coexistentes em diversas faixas de frequência da excitação.

(a)  $c_v = c_w = c_\gamma = 0,1\%$ (b)  $c_v = c_w = c_\gamma = 1,0\%$ (c)  $c_v = c_w = c_\gamma = 2,5\%$ (d)  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ 

(Equivalente à Figura 4.32.b, porém, em outra escala e com a indicação dos pontos limites)

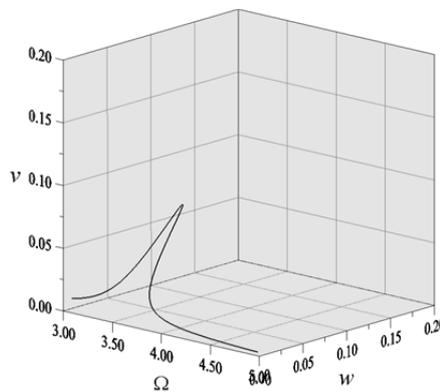
(e)  $c_v = c_w = c_\gamma = 10,0\%$ 

Figura 3.35 – Diagrama de bifurcações no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $\Omega$  para viga com solicitação lateral com resultante  $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,050$  aplicada a  $45,0^\circ$  e diferentes coeficientes de amortecimento.

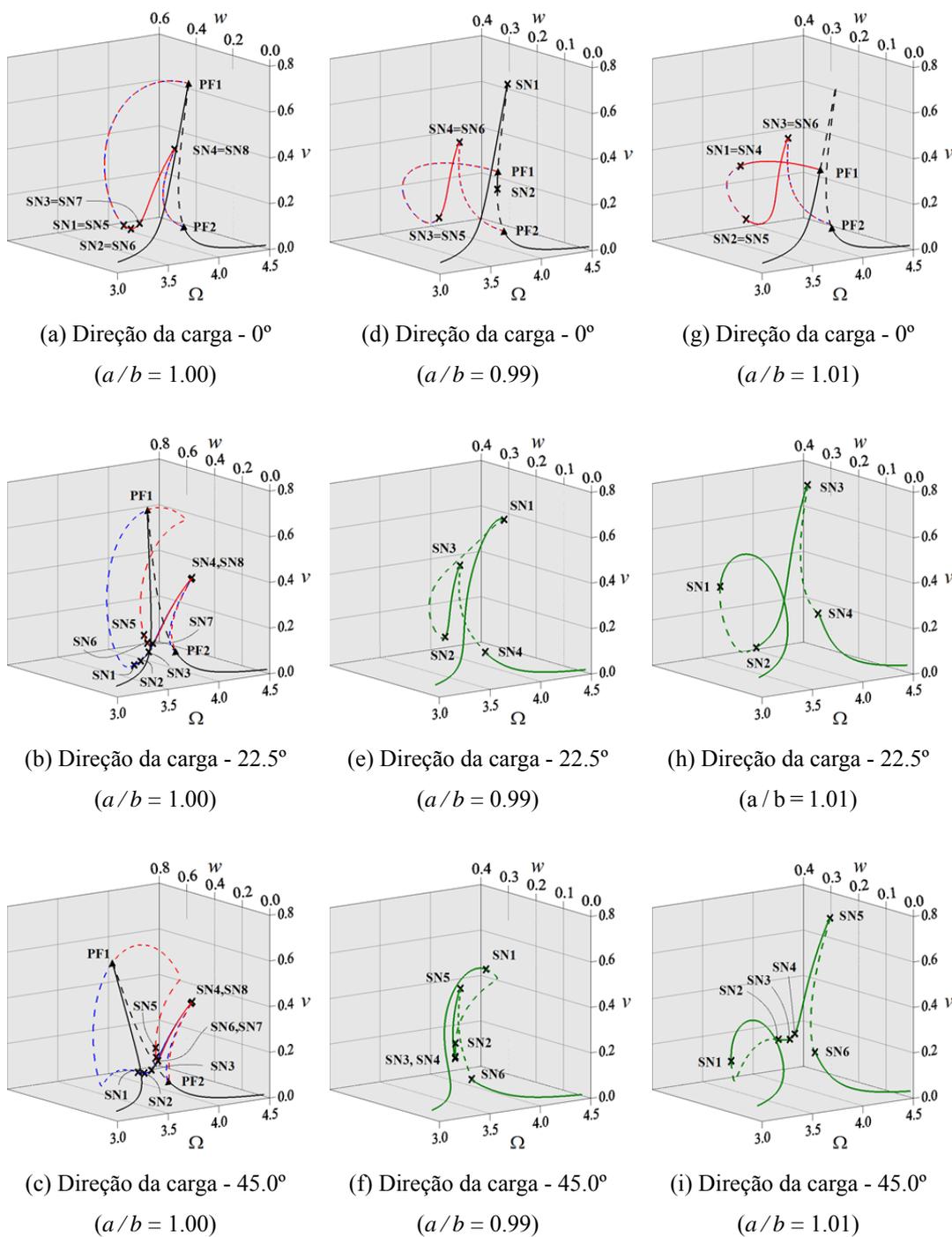


Figura 3.36 – Diagramas de bifurcação no espaço  $v - w - \Omega$  para as três direções da excitação.

O ponto de bifurcação pitchfork PF1 move-se em diferentes direções devido ao efeito da assimetria da seção transversal, tal como se mostra na Figura 3.36.b para  $a/b = 0,99$  e na Figura 3.36.c para  $a/b = 1,01$ . A perda da dupla simetria também influencia as bifurcações sela-nó ao longo dos braços de soluções fora do plano.

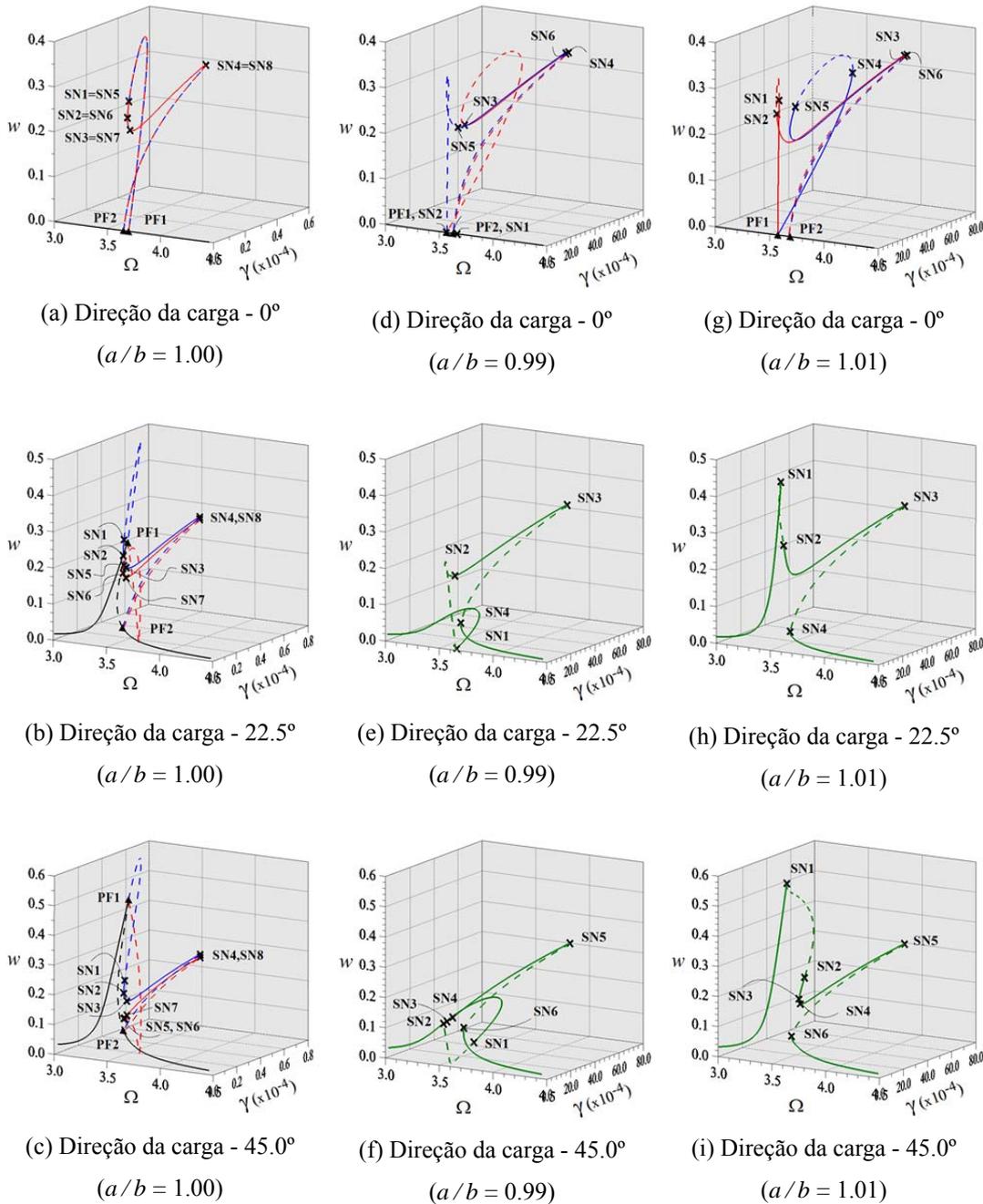


Figura 3.37 – Diagramas de bifurcação no espaço  $w - \gamma - \Omega$  para as três direções da excitação.

Comparando a Figura 3.36.a, Figura 3.36.d e Figura 3.36.g, conclui-se que pequenas variações nas dimensões da seção transversal levam a significantes variações nas trajetórias de equilíbrio da estrutura e sequências de bifurcações.

A variação do ângulo de torção  $\gamma$  para os três casos investigados é mostrada na Figura 3.37. Nela verifica-se que as oscilações por torção ocorrem apenas nas regiões de ressonância. Na Figura 3.37.a, Figura 3.37.d e Figura 3.37.g verifica-se que o aparecimento das oscilações por torção está associado com os pontos de bifurcação PF1 e PF2.

Na Figura 3.36.b e Figura 3.36.c as curvas pretas correspondem a excitações na direção da excitação, enquanto as curvas vermelhas e azuis correspondem a oscilações fora do plano. Nelas, devido ao efeito da assimetria do carregamento, os dois novos braços de soluções que surgem do ponto pitchfork (vermelho e azul) não são coincidentes, como na Figura 3.36.a. Entretanto, elas apresentam a mesma sequência de bifurcações. Os diagramas de bifurcações apresentados na Figura 3.36.a, Figura 3.36.b e Figura 3.36.c para  $a/b = 1,00$  mostram que a direção do carregamento também exerce uma marcante influência nos resultados.

O efeito simultâneo da variação nas dimensões da seção transversal e da direção do carregamento pode ser observado na Figura 3.36.e-f e na Figura 3.36.h-i. Devido a estas duas quebras de simetria, os pontos de bifurcação pitchfork não ocorrem mais. Apenas bifurcações do tipo sela-nó são observadas, 4 para a carga com resultante a  $22.5^\circ$  e 6 para  $45^\circ$ . Este comportamento era esperado, visto que as bifurcações do tipo pitchfork são estruturalmente instáveis, sob um ponto de vista matemático, sendo destruídas pelas imperfeições. Novamente, observa-se que os resultados para  $a/b = 0,99$  são bastante diferentes dos obtidos para  $a/b = 1,01$ , evidenciando mais uma vez a forte influência da perda de simetria nas oscilações da barra, influência esta também observada nas oscilações de torção apresentadas na Figura 3.37.

Comparando as respostas obtidas para estes três casos, conclui-se que as duas variações nas dimensões da seção transversal da barra ( $a/b = 0,99$  e  $a/b = 1,01$ ) funcionam como imperfeições com sinais contrários (Thompson e Hunt, 1984). Ilustra-se isto na Figura 3.38, na qual se comparam as curvas de ressonância dos três casos, considerando a excitação atuando a  $45^\circ$ . Enquanto a curva para  $a/b = 0,99$  aproxima-se da curva ideal ( $a/b = 1,00$ ) pela esquerda, a curva para  $a/b = 1,01$  aproxima-se da curva de referência pelo lado direito. Isto também explica as diferenças apontadas entre os resultados obtidos para barra com razão  $a/b = 0,99$  e  $a/b = 1,01$ .

Para auxiliar o entendimento a respeito do cenário bifurcativo e identificar as faixas de frequência onde diferentes atratores coincidem, projeções bidimensionais dos diagramas de bifurcações são apresentadas na Figura 3.39, onde se relaciona a variação da coordenada  $v$  com frequência  $\Omega$  da excitação.

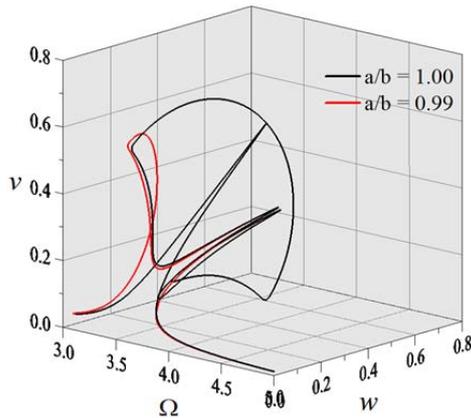
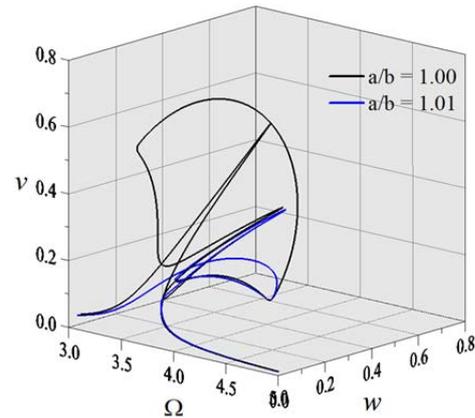
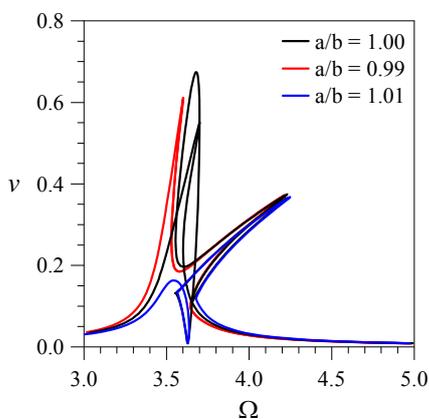
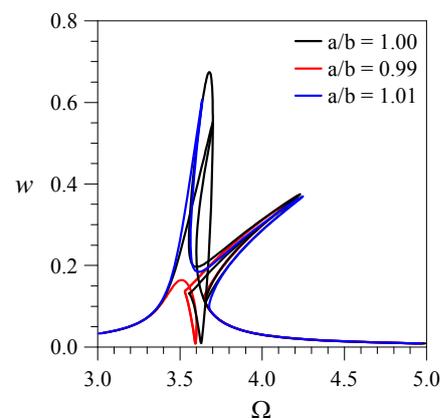
(a)  $a/b = 1.00$  (preto) e  $a/b = 0.99$  (vermelho)(b)  $a/b = 1.00$  (preto) e  $a/b = 1.01$  (azul)(c) Projeção  $v$  vs.  $\Omega$ (d) Projeção  $w$  vs.  $\Omega$ 

Figura 3.38 – Comparação dos diagramas de bifurcação para  $a/b = 1.00$ ,  $a/b = 0.99$  e  $a/b = 1.01$  para excitação aplicada a  $45^\circ$ .

A coexistência de atratores e bifurcações levam a vários saltos dinâmicos com a variação da frequência da excitação. Na Figura 3.40 mostram-se os diagramas de bifurcação obtidos com o método da força bruta incrementando (em azul) e decrescendo (em vermelho) a frequência de excitação da carga.

Algumas das soluções coexistentes na Figura 3.40 são ilustradas na Figura 3.41, que exibe projeções da resposta no tempo e do plano de fase com mapa de Poincaré sobreposto para  $\Omega = 3.643$ . A Solução A corresponde às vibrações periódicas na direção da excitação ( $\gamma = 0.00$ ), enquanto as outras soluções correspondem a vibrações periódicas fora do plano induzidas pelo acoplamento flexão-flexão-torção. A Figura 3.42 apresenta algumas seções da bacia de atração hexadimensional no plano  $\gamma$  vs.  $\dot{\gamma}$ , associada às soluções encontradas nos diagramas de bifurcação da Figura 3.41. Nelas, os pontos amarelos correspondem às projeções dos diferentes atratores neste plano.

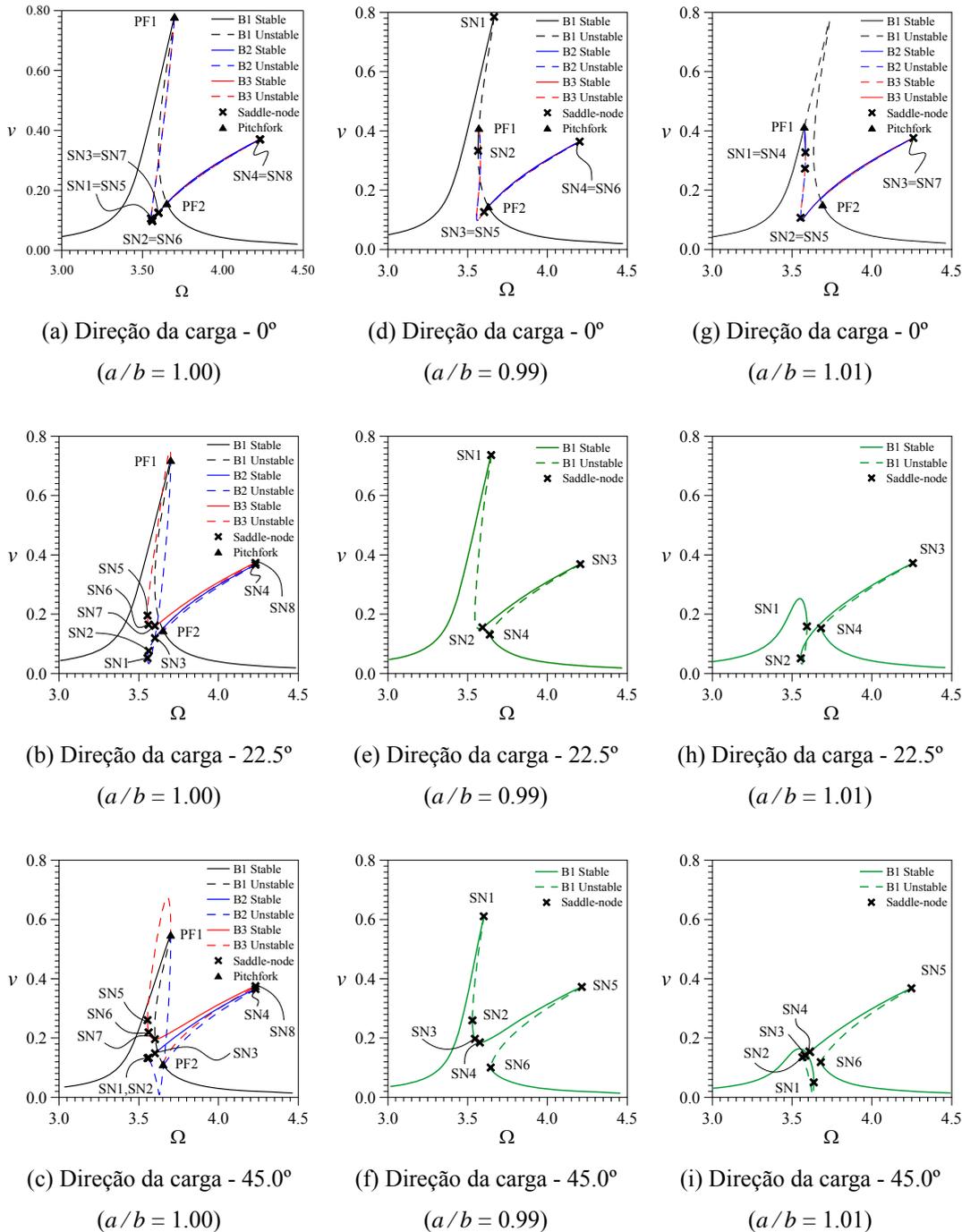


Figura 3.39 – Curva de ressonância no plano  $v - \Omega$

As cores usadas para identificar cada uma das regiões na Figura 3.42 são as mesmas usadas para identificar as órbitas na Figura 3.41. Novamente, os resultados mostram que pequenas variações nas dimensões da seção transversal da barra resultam em acentuadas modificações do cenário bifurcativo, devido, por sua vez, à influência destas no número e nas características das soluções periódicas.

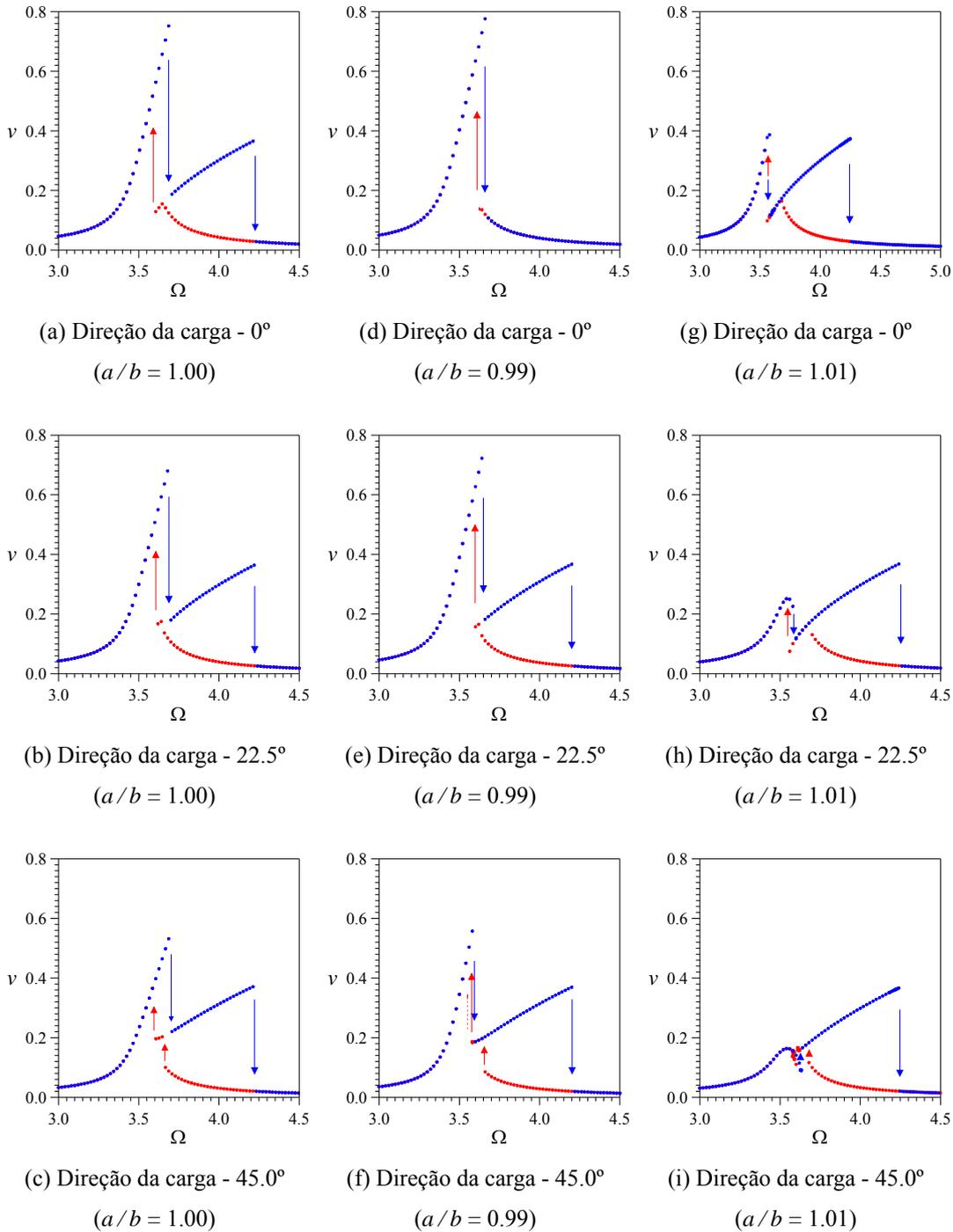


Figura 3.40 – Saltos dinâmicos para frequência de excitação crescente (azul) e decrescente (vermelho).

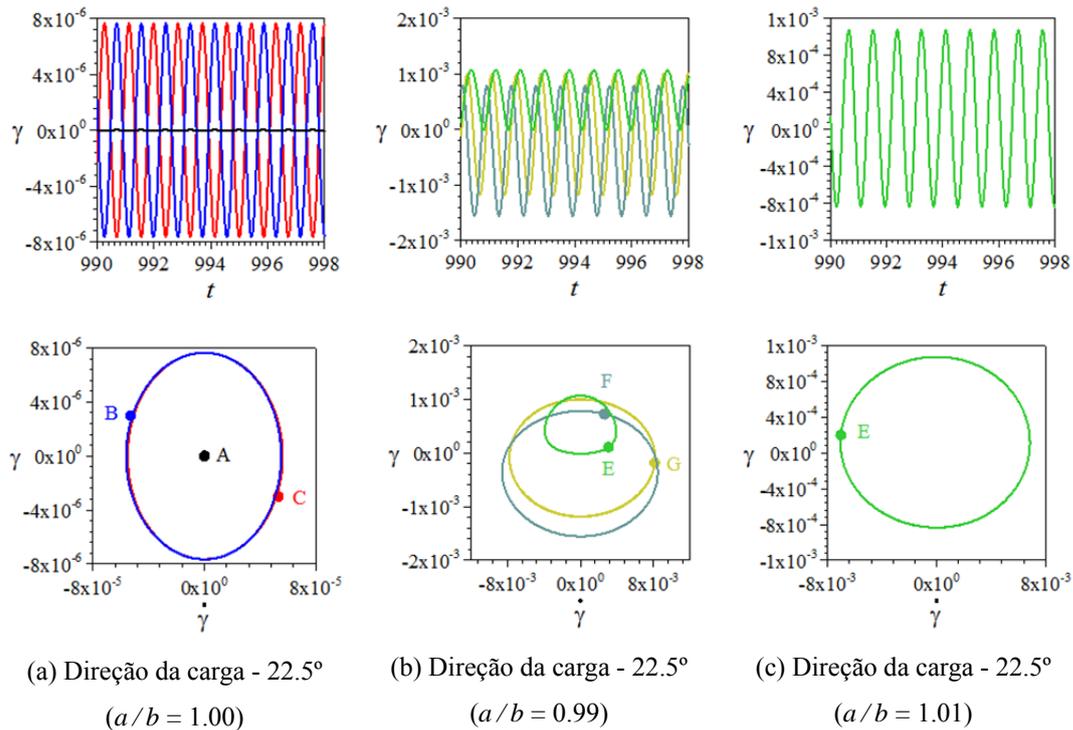


Figura 3.41 – Projeções das resposta no tempo e planos de fase dos atratores coexistentes em  $\Omega = 3.643$ .

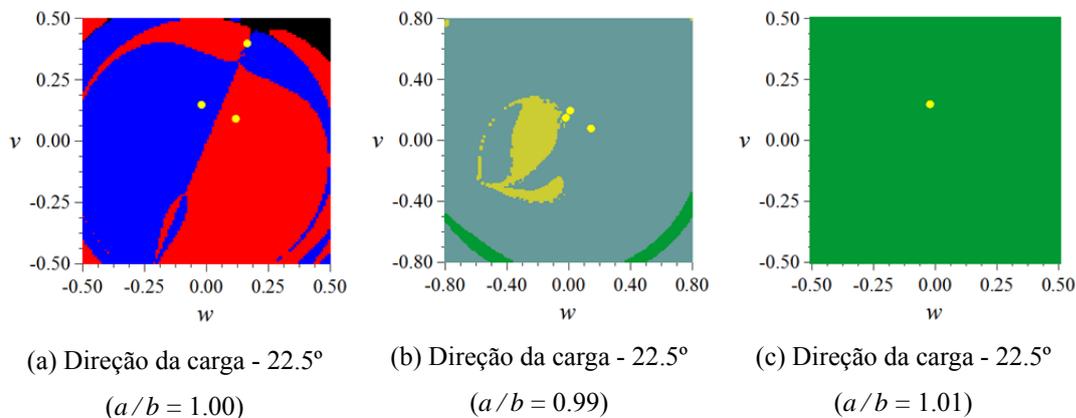


Figura 3.42 – Seções da bacia de atração para  $\Omega = 3.643$ .

### 3.6.

#### Carga axial

A presença de cargas concentradas axiais estáticas e dinâmicas são comuns em várias estruturas. Dependendo da sua magnitude e da sua frequência de vibração, as cargas concentradas podem interferir de forma significativa no comportamento dinâmico do sistema.

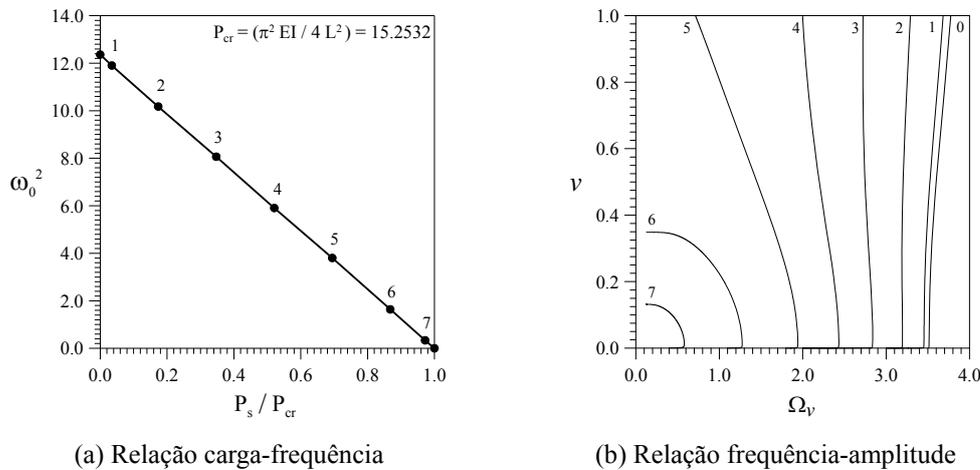
Aqui, na seção 3.6.1, a relação frequência amplitude é obtida, considerando apenas a parcela estática  $P_s$  da carga axial. Na seção 3.6.2, a instabilidade paramétrica é analisada, considerando apenas a parcela dinâmica  $q_u \cos(\Omega_u t)$  da carga axial. Na seção 3.6.3, a influência da carga estática na instabilidade paramétrica é estudada considerando, simultaneamente, as parcelas estática e dinâmica da carga axial, isto é,  $P_s + q_u \cos(\Omega_u t)$ . Finalmente, a influência da carga axial estática nas curvas de ressonância, é investigada considerando a parcela estática  $P_s$  da carga axial e uma carga harmônica  $q_v \cos(\Omega_v t)$  aplicada ao longo da barra. Para estes estudos adota-se novamente uma seção transversal quadrada com altura  $a$  e largura  $b = 1$ .

### 3.6.1.

#### Influência da carga axial estática na relação frequência amplitude

Com as considerações anunciadas previamente, obtém-se o seguinte sistema dinâmico de equações diferenciais não lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \ddot{v} + c_v \dot{v} + (12.3638 + 0.8584 P_s + 0.8584 q_u \cos(\Omega_u t))v - 6.5985 \gamma w \\
 + (22.2693 v w^2 + 4.3116 v^3)[P_s + q_u \cos(\Omega_u t)] + 40.4527 (v w^2 + v^3) \\
 + 4.5979 \left( \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v \ddot{v} + w \ddot{w} \right) v - 1.7246 \cdot 10^{-3} \left( v^2 \ddot{v} + v w \ddot{w} + w \dot{v} \dot{w} + v \dot{v}^2 \right) \\
 - 6.5005 \cdot 10^{-4} \dot{w} \dot{\gamma} + 3.2552 \cdot 10^{-5} w \dot{\gamma} - 0.7830 q_v \cos(\Omega_v t) = 0 \\
 \\
 \ddot{w} + c_w \dot{w} + [12.3638 + 0.8584 P_s + 0.8584 q_u \cos(\Omega_u t)]w + 6.5985 \gamma v \\
 + (22.2693 w v^2 + 4.3116 w^3)[P_s + q_u \cos(\Omega_u t)] + 40.4527 (w v^2 + w^3) \\
 + 4.5979 \left( \dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w \ddot{w} + v \ddot{v} \right) w - 1.7246 \cdot 10^{-3} \left( w^2 \ddot{w} + v w \ddot{v} + v \dot{v} \dot{w} + w \dot{w}^2 \right) \\
 + 6.5005 \cdot 10^{-4} \dot{v} \dot{\gamma} = 0 \\
 \\
 \ddot{\gamma} + c_\gamma \dot{\gamma} + 5957,0 \gamma + 2,6746 \left( \ddot{v} w - v \ddot{w} \right) - 0,0001 \dot{v} \dot{w} = 0
 \end{array} \right. \quad (3.16)$$



(a) Relação carga-frequência

(b) Relação frequência-amplitude

Figura 3.43 – influência da carga axial estática na menor frequência natural de vibração e na relação frequência-amplitude.

A menor frequência natural da barra não amortecida é  $\omega_0 = 3,5162$ , enquanto a carga crítica é  $P_{cr} = (\pi^2 EI / 4L^2) = 15,2532$ . Pela Figura 3.43.a, onde o quadrado da frequência natural é apresentado em função da carga axial estática, verifica-se que, enquanto a carga axial aumenta, a frequência natural diminui, tornando-se zero quando a carga axial alcança o valor crítico. A carga axial também exerce uma influência significativa na relação frequência vs. amplitude associada à menor frequência natural de vibração, como se mostra na Figura 3.43.b.

A barra não carregada exibiu um pequeno grau de não linearidade com modesto ganho de rigidez (comportamento *hardening*). Com o aumento da carga, primeiro o grau de não linearidade diminuiu e, para certo nível de carga, a curva começa a inclinar-se para a esquerda (comportamento *softening*). Para níveis elevados de carga, uma forte perda de rigidez é observada.

Em estruturas de barras, as não linearidades geométricas levam a um ganho da rigidez efetiva, enquanto as não linearidades inerciais levam à sua perda. Isto significa que, com o aumento da carga axial, aumenta-se a importância das não linearidades inerciais nas equações de movimento. Este comportamento foi observado experimentalmente por Jurjo (2001).

### 3.6.2.

#### Instabilidade paramétrica nas regiões principal e fundamental de ressonância

Agora, o comportamento dinâmico não linear de uma barra engastada livre, sujeita apenas à uma carga axial harmônica, é estudado. Aqui se adota  $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ . A Figura 3.44 apresenta a fronteira de instabilidade paramétrica da barra no espaço de controle da força (frequência  $\Omega_u$  vs. magnitude  $q_u$  da excitação). Acima da curva de instabilidade paramétrica, perturbações da solução trivial, ainda que infinitesimais, resultam em um crescimento exponencial das vibrações laterais. A curva de instabilidade paramétrica é composta por várias curvas, cada uma associada com uma bifurcação local.

A primeira região de instabilidade paramétrica importante está associada com a ressonância fundamental, isto é, quando a frequência da excitação é igual à menor frequência de vibração ( $\omega_0$ ) da barra. A segunda região de importância, a direita, está associada com a região principal de instabilidade paramétrica e ocorre quando a frequência da excitação é igual a duas vezes a menor frequência de vibração da barra ( $2\omega_0$ ). Os vales menores, à direita, estão relacionados com ressonâncias superharmônicas. À medida que a carga axial aumenta e a frequência natural diminui, a curva de instabilidade paramétrica move-se para a esquerda e aproxima-se de zero.

Para entender a perda de estabilidade da barra e as bifurcações associadas com a curva de instabilidade paramétrica, um estudo do movimento tridimensional da barra nas duas regiões mais importantes de instabilidade paramétrica ( $\Omega_u = 2\omega_0$  e  $\Omega_u = \omega_0$ ) é apresentado a seguir. Como ponto de partida, na Figura 4 mostra-se o diagrama de bifurcação para  $\Omega_u = 2\omega_0$ . Este diagrama foi obtido tomando como parâmetro de controle a amplitude  $q_u$  da excitação. Na Figura 3.45.a mostra-se a variação dos pontos fixos do mapa de Poincaré para os deslocamentos transversais  $v$  e  $w$ , os quais são análogos. Na Figura 3.45.b mostra-se os resultados para o ângulo de torção. Nestes diagramas, seis tipos de soluções são observadas: a solução trivial identificada como solução T (braço de soluções na cor marrom); duas respostas não triviais, chamadas P2 (I, O), de soluções acopladas e período dois (braços de soluções na cor verde), as quais, em razão do

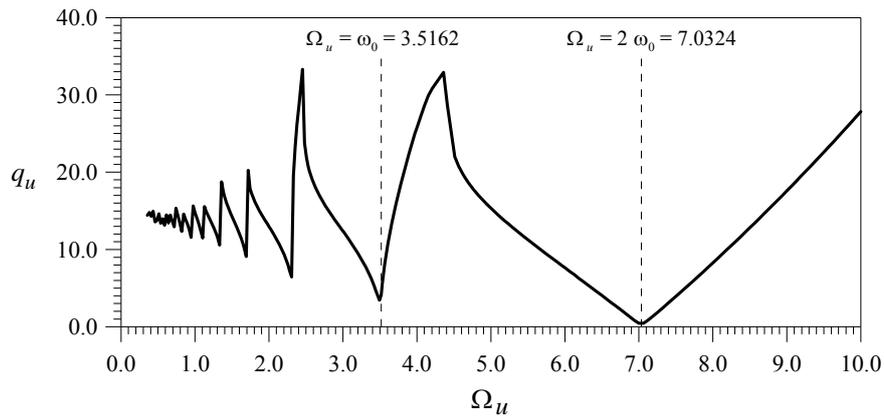
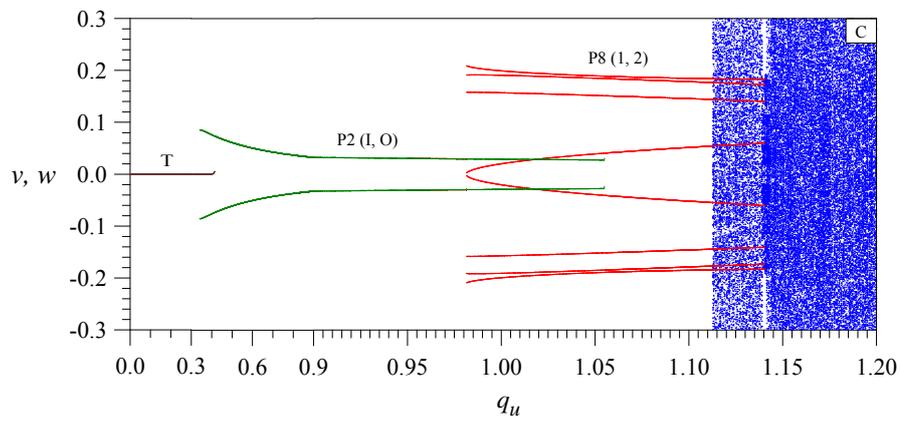
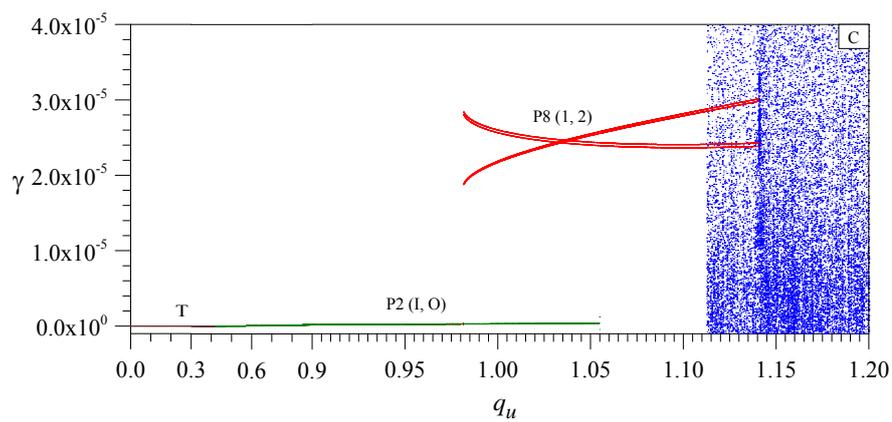


Figura 3.44 – Fronteira de instabilidade paramétrica no espaço de controle. Carga axial :  $q_u \cos(\Omega_u t)$ .



(a) Diagrama de bifurcações em  $v$  ( $w$  análogo)



(b) Diagrama de bifurcações em  $\gamma$

Figura 3.45 – Diagrama de bifurcações e mapa de Poincaré para barra sujeita a uma carga axial, considerando  $\Omega_u = 2 \omega_0$ .

acoplamento modal e da simetria da estrutura, estão superpostas na Figura 3.45; duas soluções acopladas não triviais com período de vibração 8, chamadas P8 (1, 2) e identificadas na cor vermelho, que também estão superpostas na Figura 3.45; e uma solução caótica identificada como solução C (nuvem de pontos azuis).

Na Figura 3.46 apresenta-se um detalhe do diagrama de bifurcações na vizinhança da fronteira de instabilidade paramétrica, obtido usando o algoritmo de continuação (Figura 3.46.a) e o método da força bruta (Figura 3.46.b). Com o aumento da carga axial, a solução trivial torna-se instável ( $q_u \approx 0.409$ ) devido a uma bifurcação por duplicação de período subcrítica (*subcritical period doubling bifurcation*) e a resposta salta para a solução periódica estável com período igual a duas vezes o da frequência da excitação.

Os braços de soluções periódicas não triviais surgem de um ponto limite por meio de uma bifurcação sela-nó quando  $q_u \approx 0.34$ . Os saltos dinâmicos devido às bifurcações são observados incrementando (em preto) e decrescendo (em cinza) a magnitude da carga (Figura 3.46.b). Na Figura 3.46.b observa-se que entre  $q_u \approx 0.34$  e  $q_u \approx 0.409$ , existem três soluções periódicas estáveis coincidentes, logo, a resposta da barra é uma função das condições iniciais. Duas respostas no tempo e três projeções do plano de fase, associadas a estas soluções, são apresentadas na Figura 3.47 para  $q_u = 0.38$ , junto com uma seção transversal da bacia de atração.

As duas soluções não triviais exibem as mesmas componentes  $v$  e  $w$ , tal como se verifica na Figura 3.47.a e Figura 3.47.c. A solução I (verde na Figura 3.45) corresponde a uma solução em fase e a solução O, a uma solução fora de fase, como se verifica na Figura 3.47.b e Figura 3.47.d. As simetrias observadas na bacia de atração da Figura 3.47.f expressam a ressaltada simetria da estrutura. Nesta seção transversal (onde todas as demais variáveis no espaço de fase são iguais a zero) três diferentes regiões são observadas: região marrom associada com a solução trivial (ponto fixo T), região verde associada com a solução não trivial em fase (pontos fixos I1 e I2) e região amarela associada com a solução O não trivial e fora de fase (pontos fixos O1 e O2). Como se mostra na Figura 3.45.b, o ângulo de torção, para estas soluções, é nulo e o movimento da barra ocorre a  $\pm 45^\circ$  (Figura 3.47.e) com  $v$  e  $w$  exibindo a mesma variação temporal.

Incrementando a magnitude da excitação além o ponto de bifurcação localizada sobre a fronteira de instabilidade paramétrica, verifica-se na Figura 3.45.b uma nova bifurcação para  $q_u \approx 0.981$ , onde o ângulo de torção torna-se diferente de zero ( $\gamma \neq 0.0$ ). Isto leva ao surgimento de duas soluções com período 8, chamadas P8 (1) e P8 (2), que corresponde ao movimento acoplado de flexão-flexão-torção da barra, coexistindo com a solução não trivial de período 2 vista anteriormente, isto é, P2 (I) e P2 (O). As duas soluções não triviais com período 2 desaparecem quando  $q_u \approx 1.055$ . Para  $q_u \approx 1.113$  a solução caótica (C) aparece, coexistindo com as soluções de período 8, que desaparece para  $q_u \geq 1.141$ . Após este nível de carregamento, apenas a solução caótica permanece.

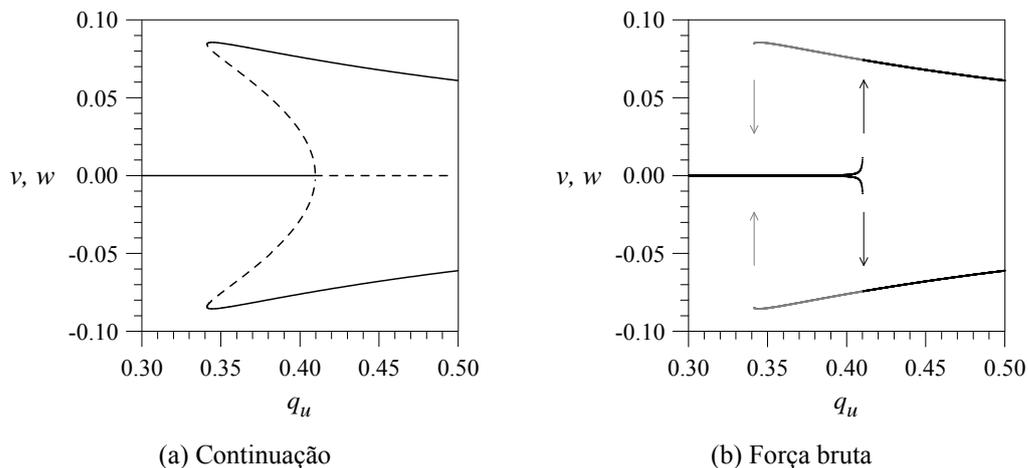
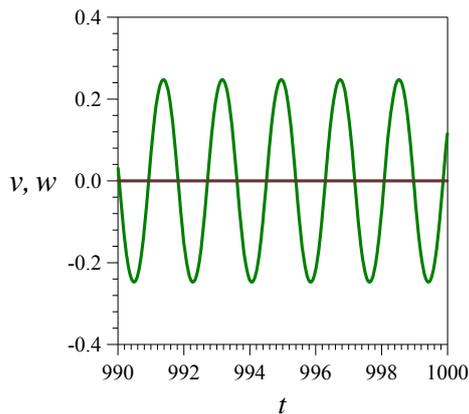
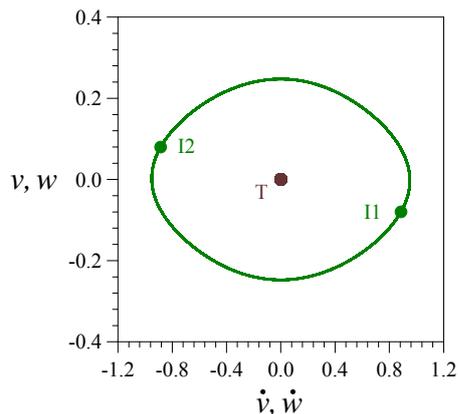


Figura 3.46 – Diagrama de bifurcações para  $\Omega_u = 2 \omega_0$  na vizinhança da fronteira de instabilidade paramétrica.

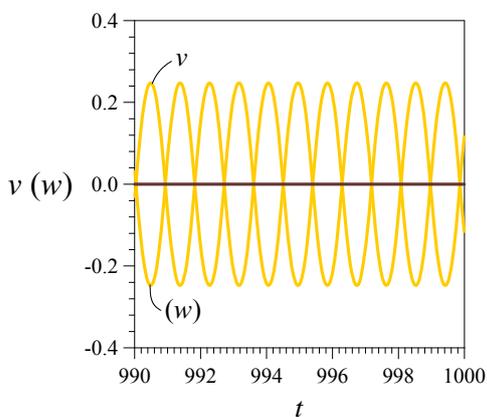
Na Figura 3.48 mostram-se quatro soluções não triviais estáveis coexistente para  $q_u = 1.00$ . Na Figura 3.48.a tem-se a projeção do plano de fase no espaço  $v$  vs.  $w$  e sua respectiva seção de Poincaré, onde se observam 7 pontos fixos simetricamente distribuídos em torno da origem. Na Figura 3.48.b mostra-se a projeção do plano de fase no espaço  $\gamma$  vs.  $\dot{\gamma}$ , onde a presença de vibrações por torção, associadas aos atratores P8 (1) e P8 (2) podem ser observadas. Finalmente, na Figura 3.48.c, mostra-se a resposta no tempo relativa ao ângulo de torção  $\gamma$ .



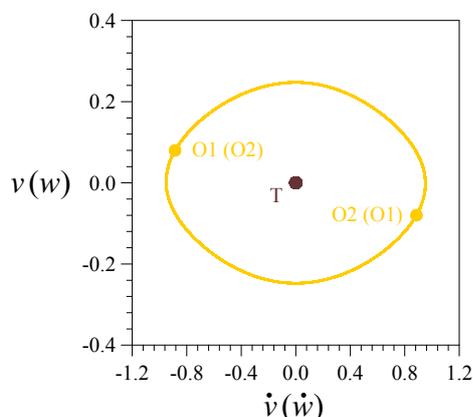
(a) Resposta no tempo  $v$  vs.  $t$  (idêntico  $w$  vs.  $t$ )  
Para soluções em fase



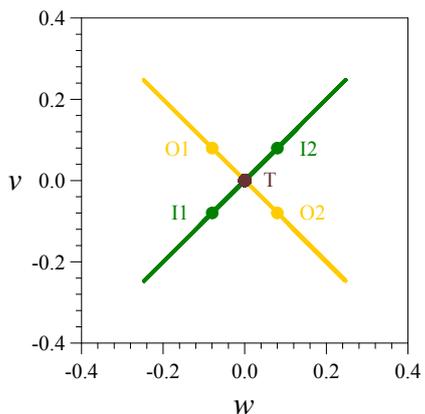
(b) Projeção do espaço de fase no plano  $v$  vs.  $\dot{v}$   
(idêntico  $w$  vs.  $\dot{w}$ ) e seção de Poincaré para  
soluções em fase



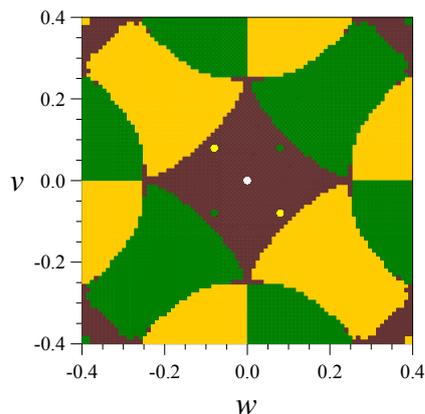
(c) Resposta no tempo  $v$  vs.  $t$  (análogo  $w$  vs.  $t$ )  
para soluções for a de fase



(d) Projeção do espaço de fase no plano  $v$  vs.  $\dot{v}$   
(análogo  $w$  vs.  $\dot{w}$ ) e seção de Poincaré para  
soluções for a de fase



(e) Projeção do espaço de fase no plano  $v$  vs.  $w$   
e seção de Poincaré



(f) Seção da bacia de atração das três soluções  
coexistentes

Figura 3.47 – Soluções estáveis coexistentes para  $q_u = 0.38$  e  $\Omega = 2 \omega_0$ .

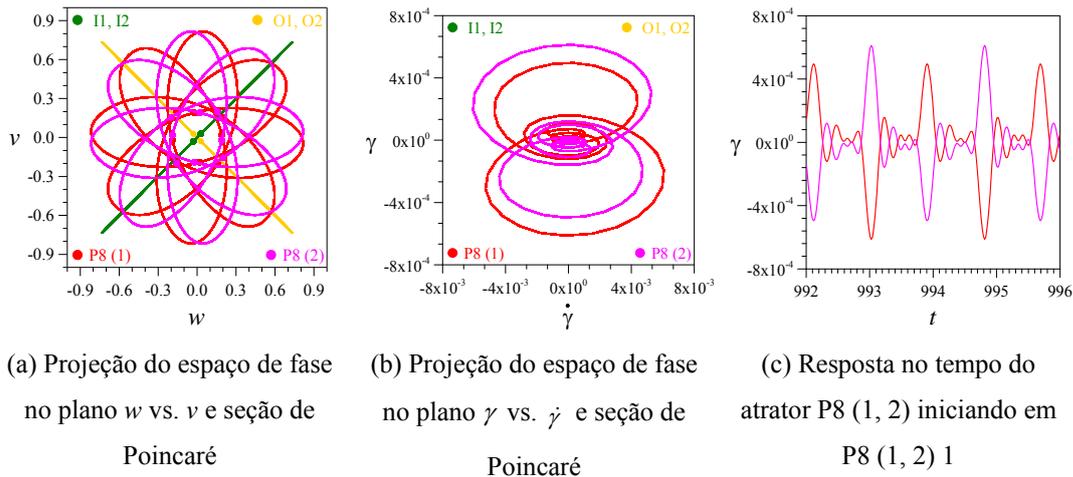


Figura 3.48 – Soluções não triviais coexistentes para  $q_u = 1,00$  e  $\Omega = 2 \omega_0$ .

Finalmente, na Figura 3.49, apresenta-se a resposta no tempo e seções de Poincaré, bem como, a evolução dos expoentes de Lyapunov ( $\lambda_i$ , onde  $i = 1 \dots 6$ ) para  $q_u = 1.18$ . A Figura 3.49.c mostra que ao menos um dos expoentes é positivo ( $\lambda_i > 0$ ), caracterizando o movimento como caótico.

A Figura 3.50 e a Figura 3.51 mostram os diagramas de bifurcação na vizinhança de  $\Omega_u = 2 \omega_0$  para, respectivamente, frequência de excitação associada com braço descendente e ascendente da região principal de instabilidade paramétrica. Em ambos os casos, uma bifurcação por duplicação de período instável é observada.

Na Figura 3.52.a e Figura 3.52.b mostra-se o diagrama de bifurcação (projecção bi e tridimensional, respectivamente) da barra, considerando  $\Omega = \omega_0$ , que corresponde à menor carga crítica na região fundamental de instabilidade paramétrica (Figura 3.44). Na Figura 3.52.a verifica-se que a solução trivial (preta) torna-se instável para  $q_u \approx 4.050$ . Novamente, a barra evolui por meio de uma bifurcação subcrítica, levando a quatro respostas de período 1 (vermelho, amarelo, azul e verde na Figura 3.52.b). Assim, somadas à solução trivial (marrom na Figura 3.52.b), entre  $q_u \approx 1.7255$  e  $q_u \approx 1.8095$ , cinco soluções periódicas coincidentes são observadas, as quais são identificadas nas respostas no tempo (Figura 3.52.d-e) e nas projeções do plano de fase (Figura 3.52.f-g). Nas respostas no tempo verifica-se que as soluções em amarelo e azul estão em fase com a excitação (solução na cor preta), enquanto as soluções em verde e vermelho estão fora de fase. Nas projeções do plano fase confirma-se o período  $1T$  das soluções.

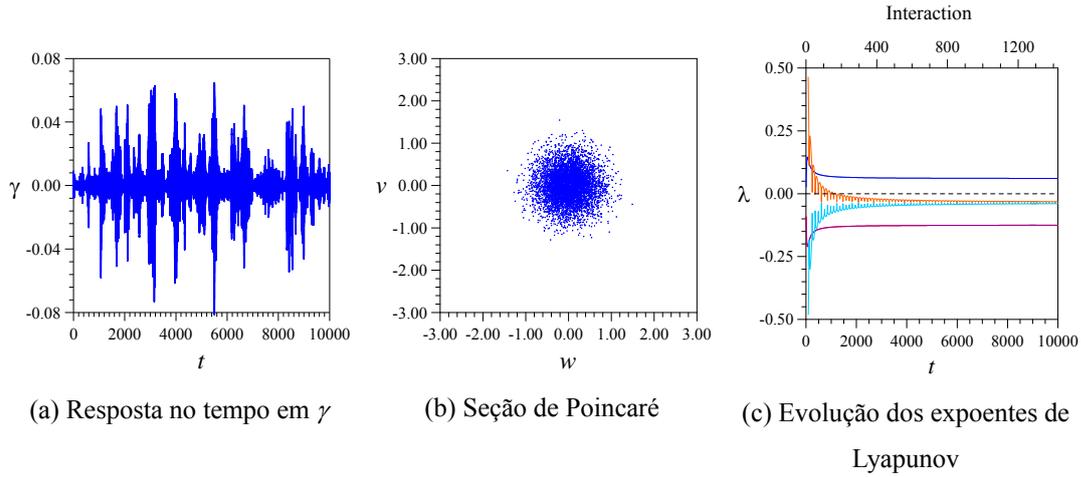


Figura 3.49 – Resposta caótica para elevadas magnitude da solitação.  $q_u = 1,18$  e  $\Omega = 2 \omega_0$ .

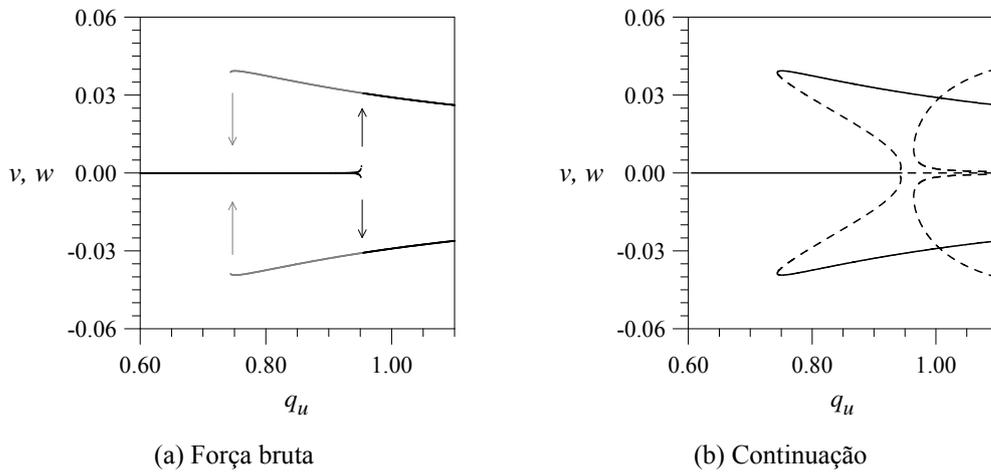


Figura 3.50 – Diagrama de bifurcações para barra sob força axial harmônica:  $q_u \cos(1,97 \omega_0 t)$ .

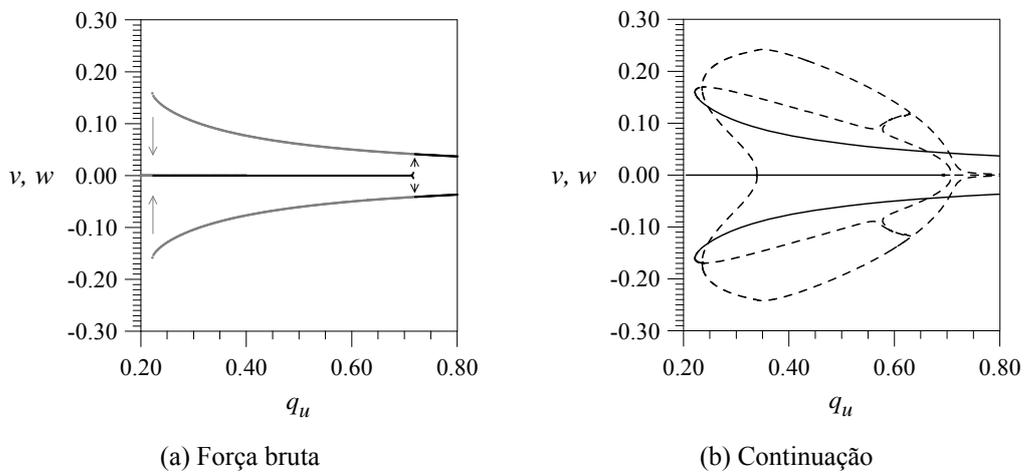


Figura 3.51 – Diagrama de bifurcações para barra sob força axial harmônica:  $q_u \cos(2,02 \omega_0 t)$ .

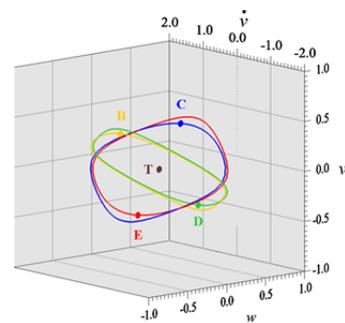
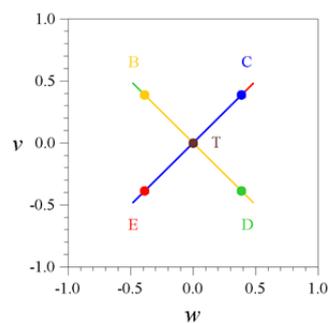
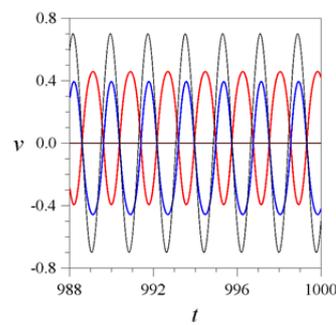
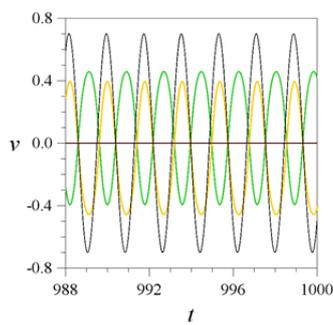
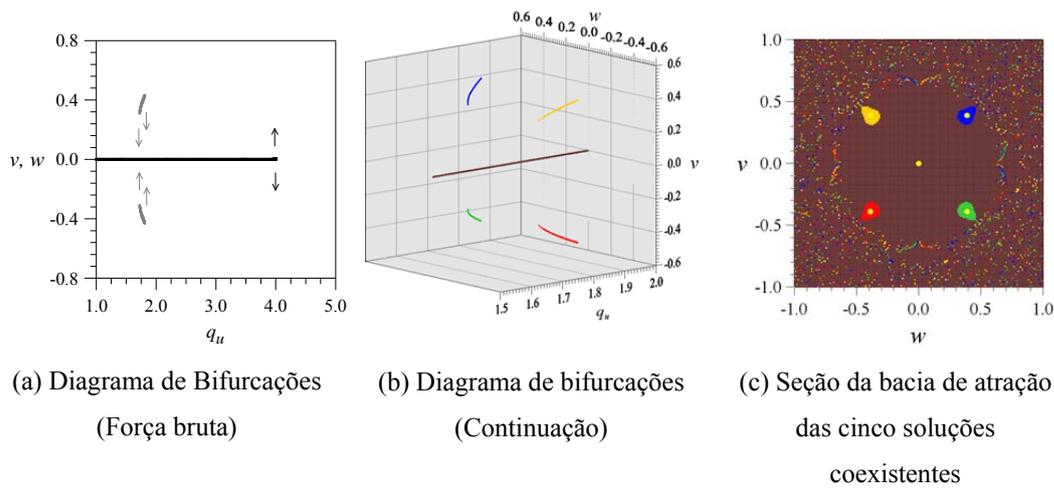


Figura 3.52 – Soluções na região fundamental de instabilidade paramétrica  $\Omega = \omega_0$ .

Em adição, na Figura 3.52.c apresenta-se uma seção transversal da bacia de atração para  $q_u = 1.77$ . Aqui, a maior parte das condições iniciais converge para a solução trivial (ponto fixo T associado com a bacia marrom). Pequenos conjuntos de condições iniciais convergem para as demais soluções não triviais. Uma grande sensibilidade é observada variando-se as condições iniciais e súbitas mudanças nas vibrações são esperadas, levando a imprevisibilidade.

Nenhuma solução estável foi detectada após o ponto de instabilidade paramétrica, porque as quatro respostas de período 1 (superpostas em cinza na Figura 3.52.a) mantêm-se estáveis em apenas uma pequena faixa de  $q_u$ . Este comportamento é particularmente perigoso uma vez que a estrutura experimenta um salto muito forte quando a carga excede a carga de instabilidade paramétrica, levando assim ao colapso da estrutura.

### 3.6.3.

#### **Influência da carga axial estática na fronteira de instabilidade paramétrica**

Para avaliar o efeito da parcela estática da carga axial ( $P_s$ ) na instabilidade paramétrica do sistema, obtêm-se os diagramas de bifurcações com o método da força bruta incrementando a carga axial na região principal de instabilidade paramétrica ( $\Omega = 2 \omega_0$ ), onde para cada caso  $\omega_0$  é a menor frequência natural de vibração da barra carregada, tal como na Figura 3.43.a. Comparando os diagramas de bifurcações na Figura 3.53, observa-se que, com o incremento da carga axial e o conseqüente decréscimo da frequência natural, a fronteira de instabilidade paramétrica move-se para a esquerda e as bifurcações passam de subcrítica para supercrítica.

A fronteira de instabilidade paramétrica para o caso 3, na região principal de instabilidade paramétrica  $\Omega_v = 2 \omega_0$  ( $P_s / P_{cr} = 0,35$ ), é apresentada na Figura 3.54. Na Figura 3.55 mostra-se que, para este nível de carregamento, o lado descendente da fronteira está associado a bifurcações subcríticas, enquanto o lado ascendente está associado com bifurcações supercríticas.

### 3.6.4.

#### **Influência da carga axial estática na resposta não linear da barra sob excitação lateral**

A seguir, investiga-se a influência da parcela estática da carga axial no comportamento dinâmico não linear da barra sob excitação harmônica lateral dada por  $q_v \cos(\Omega_v t)$  na região fundamental de ressonância ( $\Omega_v = \omega_0$ ).

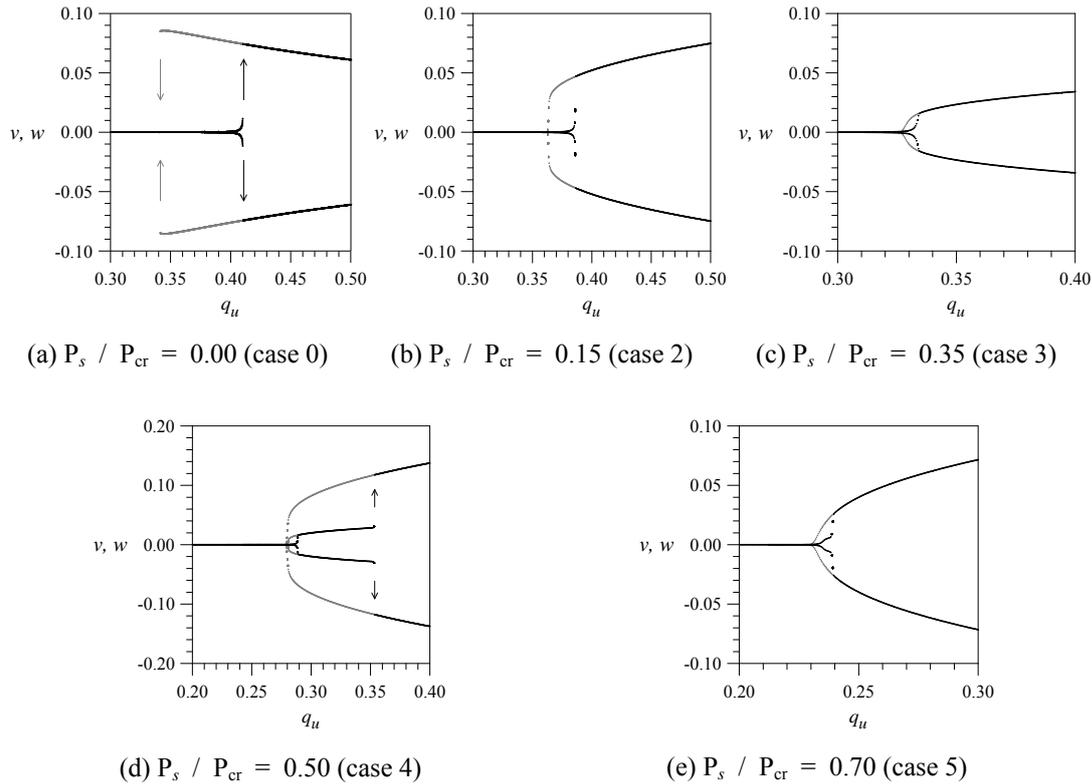


Figura 3.53 – Diagrama de bifurcações para viga sujeita ao aumento da carga axial estática, considerando  $\Omega = 2 \omega_0$ .

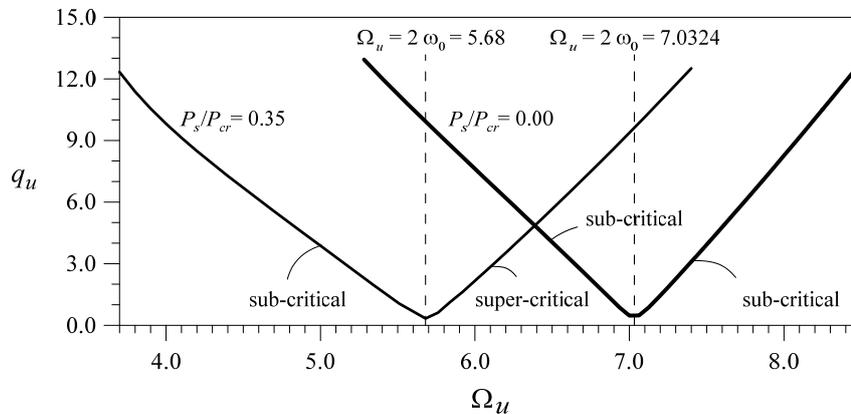


Figura 3.54 – Fronteira de instabilidade paramétrica par carga axial estática  $P_s / P_{cr} = 0.35$  (caso 3).

Na Figura 3.56 mostra-se a influência do aumento da carga axial estática nos diagramas de bifurcação considerando  $q_v = 0,1$ . Com o aumento da carga axial, novos caminhos surgem levando o sistema a várias bifurcações secundárias. Também, com o aumento da magnitude da carga de compressão, quando a frequência natural aproxima-se de zero a maioria dos braços de soluções tornam-se instáveis, conseqüentemente, o ponto de bifurcação PF1 move-se para a

esquerda na descendente, levando a regiões sem qualquer solução periódica estável. Isto pode ser observado na Figura 3.56.d. Também, devido à carga axial a curva de ressonância (Figura 3.43.b) muda de *hardening* para *softening*.

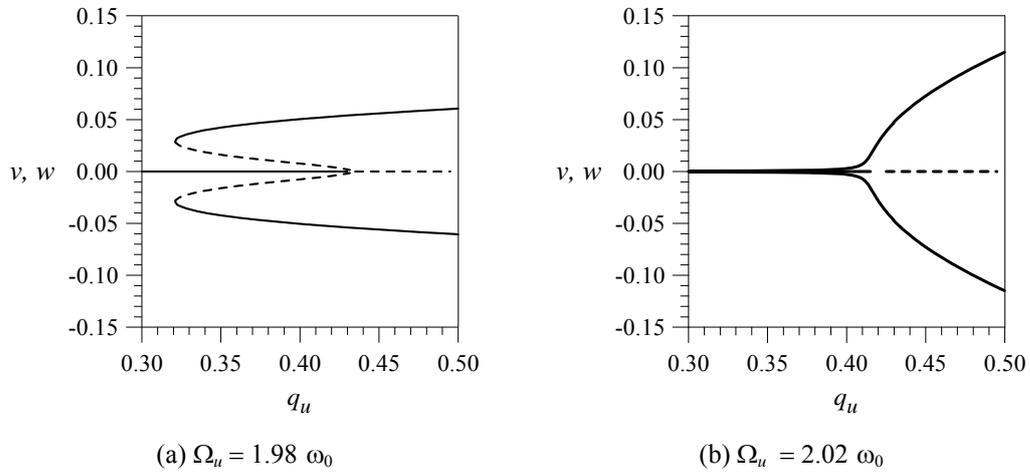


Figura 3.55 – Diagrama de bifurcação na região principal de instabilidade paramétrica.  $P_s / P_{cr} = 0.35$  (caso 3).

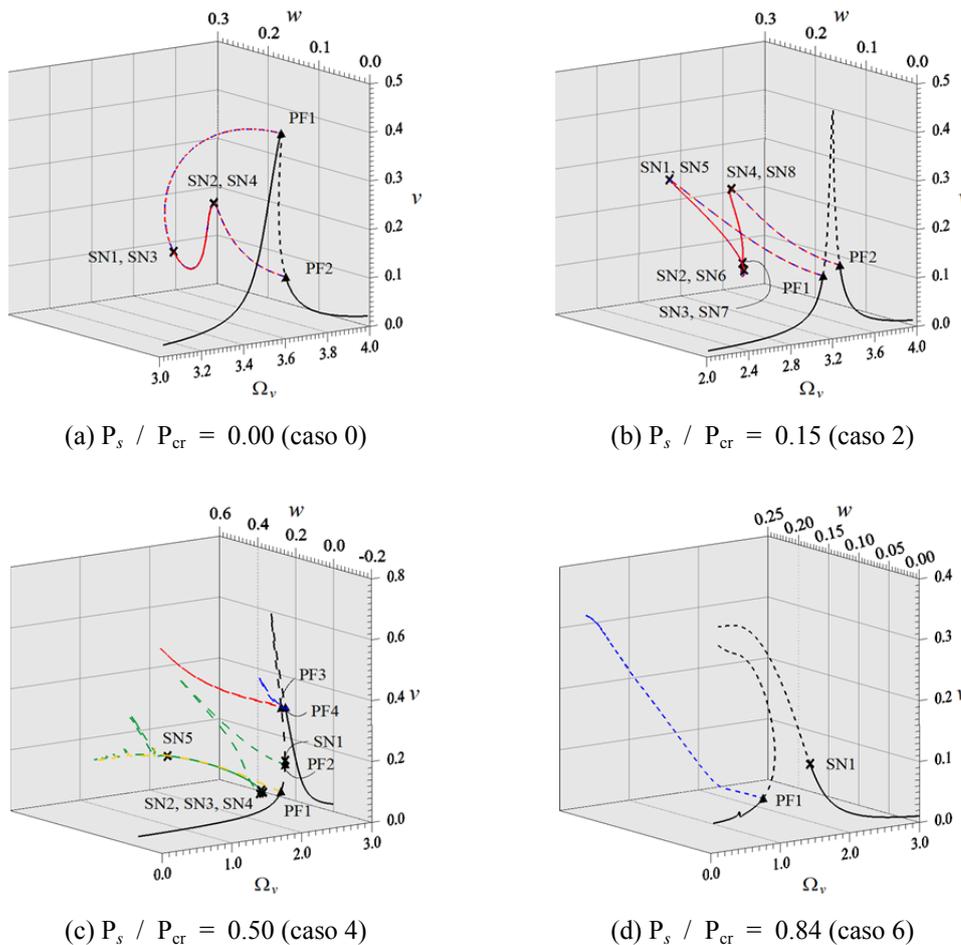


Figura 3.56 – Efeito da carga axial estática nos diagrama de bifurcações tendo a frequência de vibração da carga lateral como parâmetro de controle.

Em adição, na Figura 3.57, mostram-se os diagramas de bifurcação no espaço  $v$  vs.  $w$  vs.  $q_v$  para três diferentes valores de frequência e magnitude (Casos 0, 2 e 4) da solitação lateral, associados com os diagramas das Figura 3.56.a–c. As cores utilizadas para identificar diferentes braços de soluções são os mesmos da Figura 3.56.

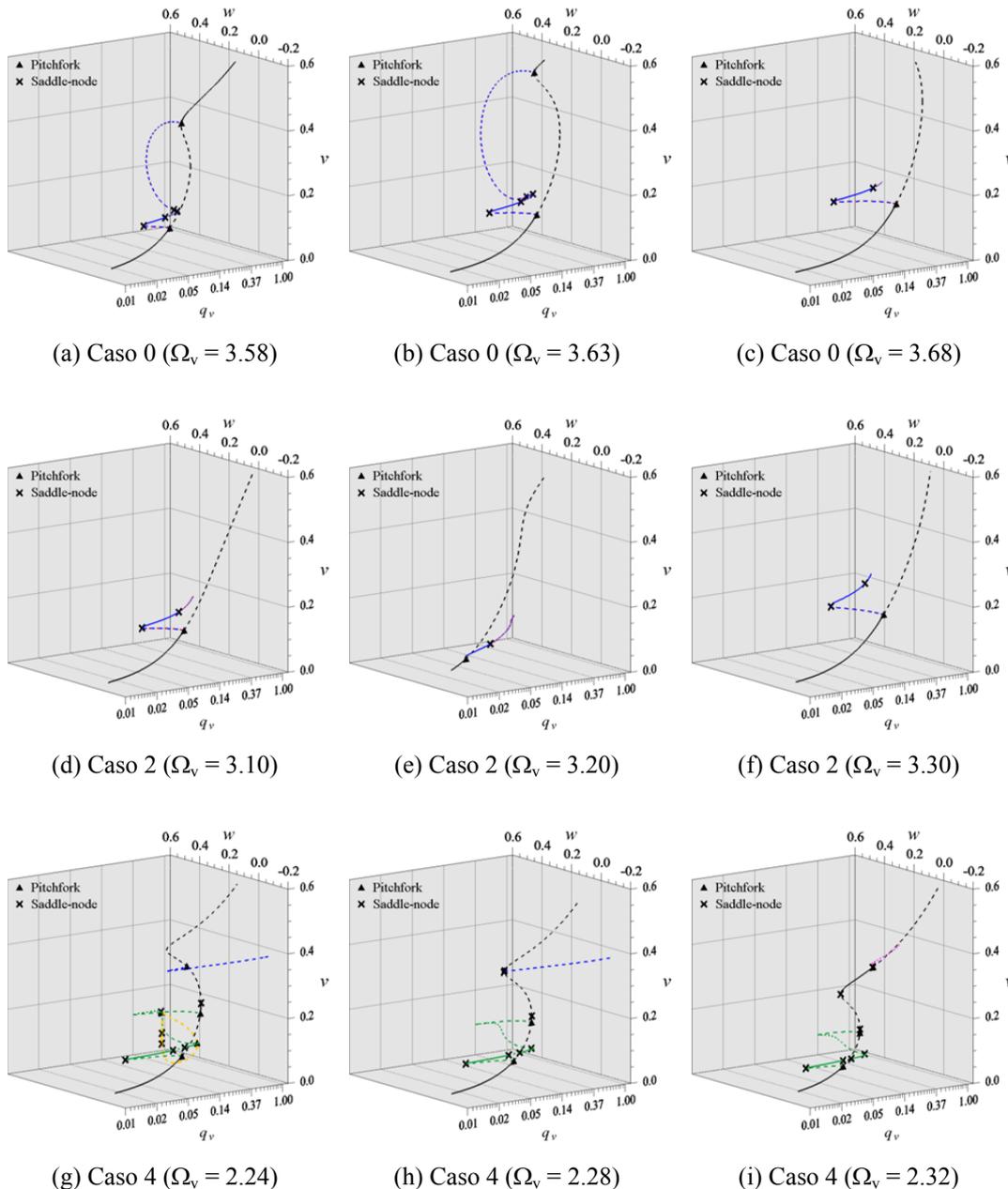


Figura 3.57 – Efeito da carga axial estática nos diagrama de bifurcações tendo a magnitude da carga lateral como parâmetro de controle.

Comparando os resultados na Figura 3.57, conclui-se que a parcela estática da carga axial exerce significativa influência nos caminhos de equilíbrio e sequências de bifurcações. Em todos os casos, com o aumento da carga axial, as

soluções planares tornam-se instáveis em virtude de uma bifurcação pitchfork instável.

Os braços passam por uma série de bifurcações sela-nó, levando a coexistência de soluções estáveis em várias faixas de frequência. Se a barra é excitada a um ângulo diferente de zero, os dois caminhos deixam de ser superpostos, como se vê na Figura 3.58, onde se mostra o diagrama de bifurcação para uma barra excitada a  $45^\circ$ .

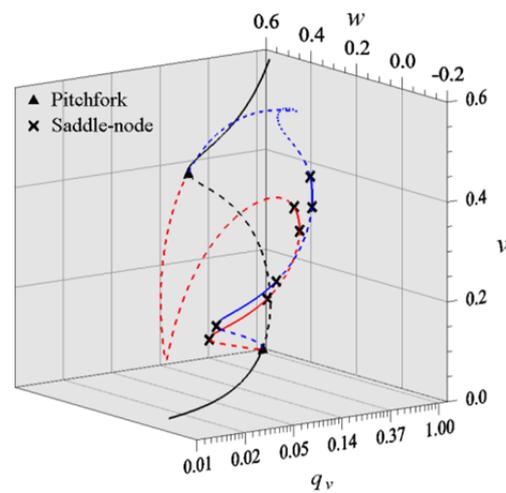


Figura 3.58 – Diagrama de bifurcações no espaço  $v - w - q_v$ , considerando a carga lateral a  $45^\circ$ . Caso 0,  $\Omega_v = 3.63$ .