

4.

Análise do movimento acoplado de barras com baixa rigidez à torção

“Qualquer desequilíbrio que o homem provoque em si mesmo, tanto em seu complexo psicológico, físico ou mental, como em qualquer das coisas vivas que o rodeiam, contraria de fato o Grande Pensamento, podendo trazer-lhe, em consequência, sérias alterações no ritmo normal de sua vida.”

Carlos Bernardo González Pecotche.

4.1.

Aspectos gerais

No capítulo anterior, investigaram-se as oscilações, a estabilidade e os tipos de bifurcações associados ao movimento tridimensional de barras com elevada rigidez à torção. Contudo, na prática, várias seções geométricas, em particular muitos perfis abertos de parede fina, podem apresentar baixa rigidez à torção (Davies, 2000). Uma geometria bastante estudada por sua baixa rigidez à torção é a seção cruciforme. Estas seções, dependendo da espessura da parede da seção transversal, podem apresentar uma variada gama de comportamentos e, assim, cobrir muitos dos casos encontrados da prática, razão que motiva seu estudo neste trabalho. Alguns exemplos de pesquisas contemplando o estudo da estabilidade torsional de barras com seção transversal cruciforme podem ser encontrados em Hutchinson e Budiansky (1976), Dabrowski (1988), Chen e Trahair (1994) e Trahair (2012).

4.2.

Seção transversal em forma de cruz

Considera-se, pois, uma barra uniforme, de material elástico linear e isotrópico, comprimento L e seção transversal em forma de cruz, com espessura e , altura h e largura b , sendo $L/b = 25$ e $b = h$. Além disto, consideram-se as dimensões b e h fixas e a espessura e variável. Na Figura 4.1 apresenta-se um segmento deformado da barra com comprimento s , bem como a seção transversal da barra.

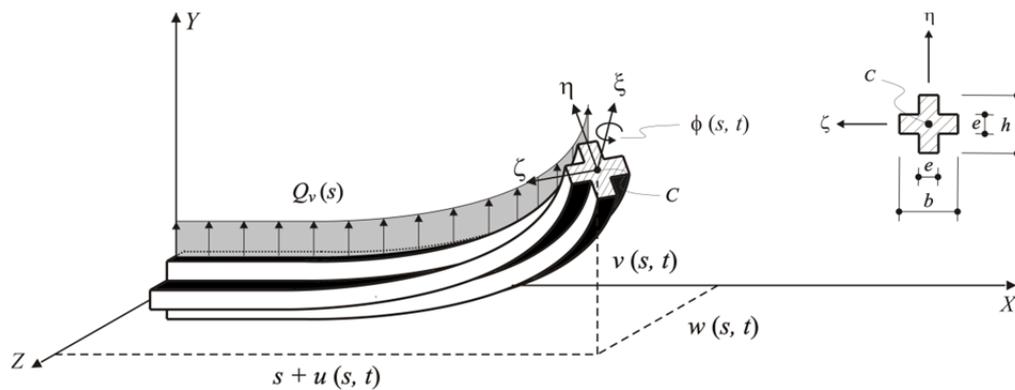


Figura 4.1 – Representação esquemática da seção transversal da barra na forma de cruz.

A partir da geometria da barra determinam-se as rigidezes à torção, D_ξ , e à flexão, D_η e D_ζ , e, a partir destas, as seguintes grandezas adimensionais:

$$\beta_y = \frac{D_\zeta}{D_\eta} = 1, \quad (4.1)$$

$$\beta_\gamma = \frac{D_\xi}{D_\eta} = G \left[\frac{(1/3)e^3(b+h+e)}{(1/3)Eb^3h} \right]. \quad (4.2)$$

sendo E o módulo de Young e G o módulo de elasticidade transversal da barra.

A partir da geometria da barra, determinam-se também os momentos de inércia J_ξ , J_η e J_ζ da barra, os quais são dados por:

$$J_\eta = \frac{1}{12} \frac{b^3 + e^2 h - e^3}{(h+b-e)L^2}, \quad (4.3)$$

$$J_\zeta = \frac{1}{12} \frac{h^3 + e^2 b - e^3}{(h+b-e)L^2}, \quad (4.4)$$

$$J_\xi = J_\eta + J_\zeta, \quad (4.5)$$

Finalmente, por meio das Equações (2.150) a (2.152), obtêm-se as constantes adimensionais $C_v = 1$, $C_w = 1$, $C_\gamma = 2^{0,5}$.

Cabe destacar que, como as equações de movimento são adimensionais, o que realmente importa é a relação entre os coeficientes de inércia e rigidez da barra à medida que se varia as dimensões da seção transversal. Convém mencionar também que a seção em forma de cruz adotada retém as mesmas simetrias da seção quadrada. Entretanto, comparada a esta, a seção em forma de

cruz possui menor rigidez à torção, razão esta que motiva a escolha dos doze casos listados na Tabela 4.1. As três frequências mínimas de vibração para cada modo, ω_v , ω_w e ω_γ , também são mostradas na Tabela 4.1. Observa-se que a segunda e terceira frequência associada a cada modo são muito maiores do que a primeira frequência, justificando a aproximação dos deslocamentos, no método de Galerkin, utilizando-se os três primeiros modos de vibração da barra para o estudo da ressonância na região da frequência mínima.

Tabela 4.1 – Seções cruciformes investigadas e frequências naturais de vibração da barra com razões $b/h = 1$ e $L/b = 25$.

Caso	Dimensão e/b	1ª frequência		2ª frequência		3ª frequência	
		$\omega_v = \omega_w$	ω_γ	$\omega_v = \omega_w$	ω_γ	$\omega_v = \omega_w$	ω_γ
1	0.0100	3.516	0.237	22.034	0.712	61.700	1.187
2	0.0333	3.516	1.444	22.034	4.333	61.700	7.221
3	0.0526	3.516	2.863	22.034	8.588	61.700	14.314
4	0.0556	3.516	3.104	22.034	9.312	61.700	15.520
5	0.0588	3.516	3.381	22.034	10.143	61.700	16.906
6	0.0597	3.516	3.457	22.034	10.371	61.700	17.285
7	0.0601	3.516	3.488	22.034	10.464	61.700	17.440
8	0.0602	3.516	3.504	22.034	10.511	61.700	17.519
9	0.0603	3.516	3.516	22.034	10.548	61.700	17.581
10	0.0604	3.516	3.520	22.034	10.559	61.700	17.598
11	0.0687	3.516	4.267	22.034	12.801	61.700	21.335
12	0.0769	3.516	5.049	22.034	15.147	61.700	25.245

Quando a espessura das abas da seção transversal aumentam, os momentos de inércia e de massa da estrutura também aumentam. Entretanto, para as dimensões aqui adotadas, as frequências associadas aos modos de flexão (ω_v e ω_w) mantêm-se praticamente constantes enquanto a frequência a torção (ω_γ) aumenta com a espessura. Na Tabela 4.1, quando $e = 0,01 b$ (caso 1), a frequência a torção é quase nula. A menor frequência associada ao modo de torção é igual ou muito próxima das de flexão quando $0,0602 b < e < 0,0604 b$, ou seja, entre os casos 8 e 10. Nestes casos, um complexo comportamento é esperado devido à ressonância interna 1:1:1. A partir do caso 10, a frequência de torção é maior do que as de flexão, decrescendo assim o seu efeito no comportamento dinâmico do sistema.

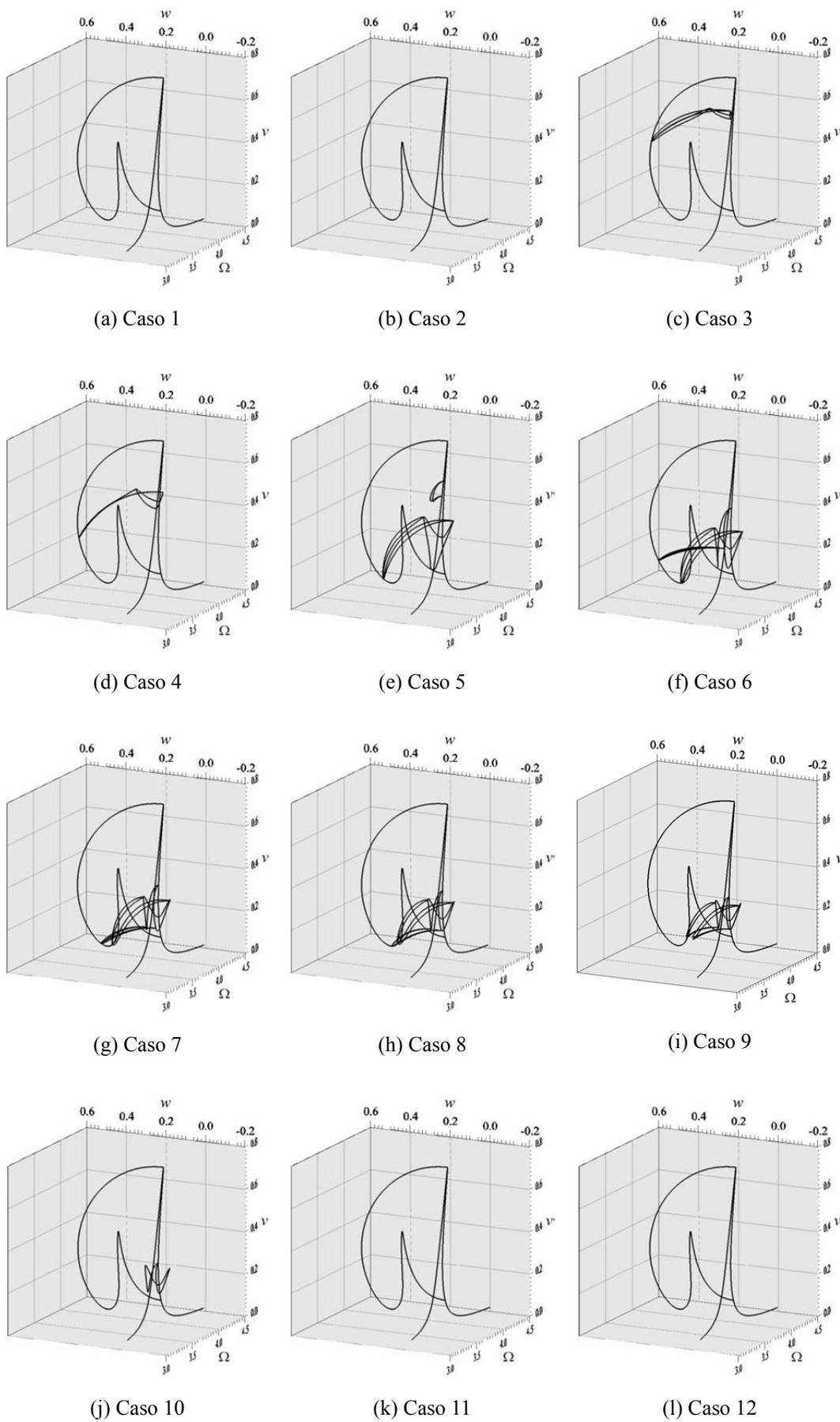
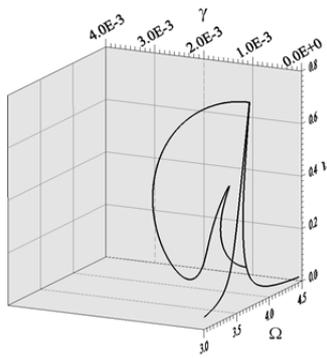
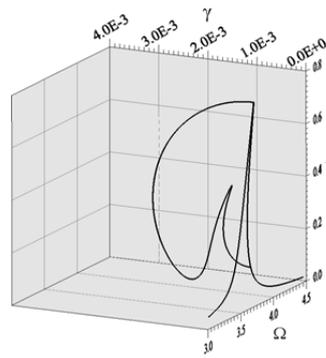


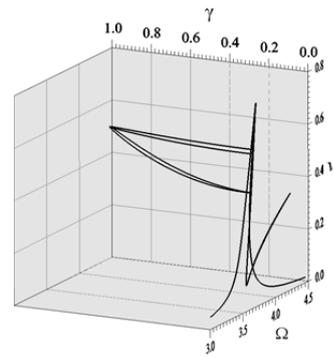
Figura 4.2 – Diagrama de bifurcações no espaço $v - w - \Omega$ para os 12 casos listados na Tabela 4.1.



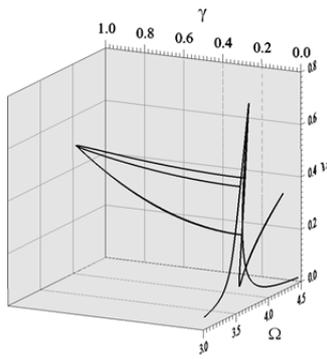
(a) Caso 1



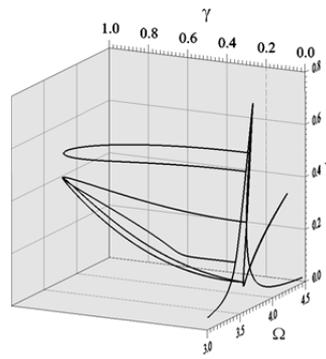
(b) Caso 2



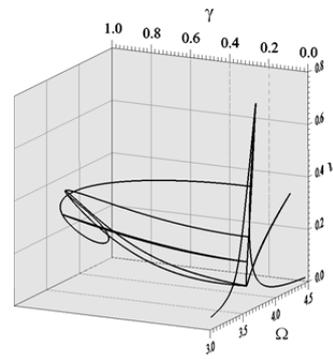
(c) Caso 3



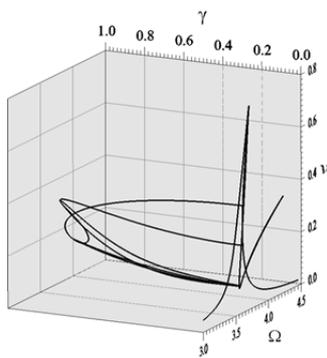
(d) Caso 4



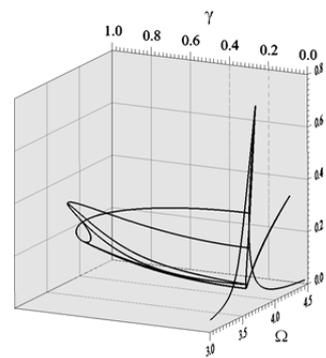
(e) Caso 5



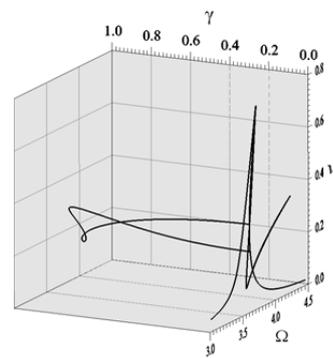
(f) Caso 6



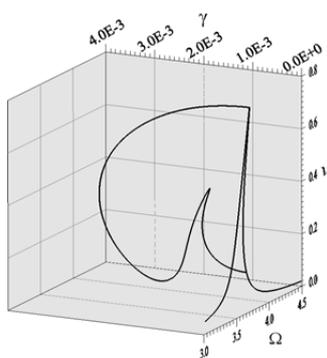
(g) Caso 7



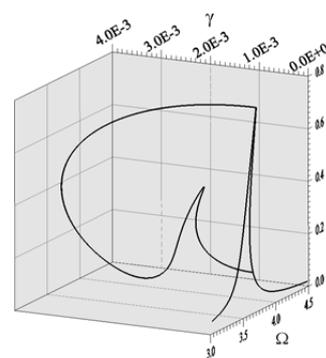
(h) Caso 8



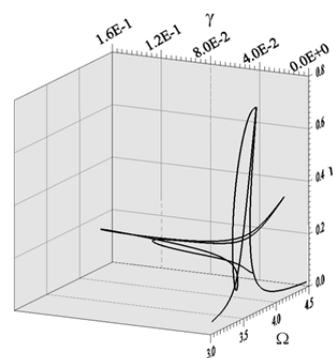
(i) Caso 9



(j) Caso 10



(k) Caso 11



(l) Caso 12

Figura 4.3 – Diagrama de bifurcações no espaço $\nu - \gamma - \Omega$ para os 12 casos listados na Tabela 4.1.

Tabela 4.2 – Ângulos de torção máximos alcançados nos diagramas de bifurcações da Figura 4.3.

Caso	Ângulo de torção γ
1	0.001877
2	0.001958
3	0.74297
4	0.883529
5	0.974443
6	0.973016
7	0.965171
8	0.960027
9	0.949435
10	0.002971
11	0.003879
12	0.130523

Para o estudo das vibrações forçadas, considera-se uma carga lateral harmônica, uniformemente distribuída e de magnitude $q_v = 0,2$. Consideram-se também coeficientes de amortecimento viscoso $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$. Na Figura 4.2 apresentam-se, para os 12 casos listados na Tabela 4.1, projeções do diagrama de bifurcações no espaço $v - w - \Omega$ e na Figura 4.3 projeções no espaço $v - \gamma - \Omega$. Por conveniência, as informações a respeito da estabilidade das soluções e a indicação dos pontos de bifurcação foram omitidas.

Na Figura 4.2 e Figura 4.3 verifica-se uma variação contínua no diagrama de bifurcações com o incremento na espessura das abas da barra. Em geral, uma sutil variação é observada. Entretanto algumas mudanças importantes são observadas entre os casos (2 - 3), (4 - 5), (9 - 10) e (10 - 11), onde, respectivamente, alguns braços de soluções aparecem, deslocamentos negativos aparecem em w , alguns braços de soluções desaparecem e os deslocamentos negativos em w desaparecem. Na Tabela 4.2 listam-se os maiores ângulos de torção lidos nos diagramas de bifurcações da Figura 4.3. Nela confirma-se a maior participação do ângulo de torção, na resposta dinâmica do sistema, próximo à região de ressonância interna 1:1:1.

Como esperado, a resposta da barra sujeita à excitação lateral harmônica torna-se mais complexa próximo à região de ressonância interna 1:1:1. Para investigar o comportamento dinâmico da barra próximo a esta região, o caso 8 foi escolhido para uma análise numérica detalhada. Para este caso, os seguintes momentos de inércia $J_\eta = 0,000069$, $J_\zeta = 0,000069$ e $J_\xi = 0,000138$ e parâmetros adimensionais $\beta_v = 1.0$ e $\beta_\gamma = 0.00069$ foram obtidos. Com base nestas propriedades e aplicando o método de Galerkin, o seguinte sistema de equações não linear é obtido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{v} + c_v \dot{v} + 12.3631v - 6,5981\gamma w + 40,4469(v w^2 + v^3) \\ + 4,5974 \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v \ddot{v} + w \ddot{w} \right) v - 8.9199 \cdot 10^{-4} \left(v^2 \ddot{v} + v w \ddot{w} + w \dot{v} \dot{w} + v \dot{v}^2 \right) \\ - 3.3645 \cdot 10^{-4} \dot{w} \dot{\gamma} + 1.6822 \cdot 10^{-5} w \dot{\gamma} - 0.7830 q_v \cos(\Omega t) = 0 \\ \ddot{w} + c_w \dot{w} + 12.3631w + 6,5981\gamma v + 40,4469(w v^2 + w^3) \\ + 4,5974 \left(\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w \ddot{w} + v \ddot{v} \right) w - 8.9199 \cdot 10^{-4} \left(w^2 \ddot{w} + v w \ddot{v} + v \dot{v} \dot{w} + w \dot{w}^2 \right) \\ + 3.3645 \cdot 10^{-4} \dot{v} \dot{\gamma} = 0 \\ \ddot{\gamma} + c_\gamma \dot{\gamma} + 12.2770\gamma + 2,6739 \left(\ddot{v} w - v \ddot{w} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

A Figura 4.4 apresenta uma projeção do diagrama de bifurcações no espaço $v - w - \Omega$ para o caso 8. Detalhes das regiões onde a maioria das bifurcações ocorre são encontrados na Figura 4.5. Para ajudar no entendimento a respeito do cenário bifurcativo, mostram-se na Figura 4.6 projeções bidimensionais do diagrama de bifurcações, considerando cada grau de liberdade da barra. Mantendo a formatação dos estudos anteriores, a curva na cor preta corresponde às vibrações no plano, onde carga e estrutura estão contidas no mesmo plano (XY) e os deslocamentos w e o ângulo de torção γ são iguais a zero.

O acoplamento flexão-flexão-torção da barra induz o aparecimento de movimentos fora do plano. Devido à bifurcação pitchfork PF1, dois novos caminhos de equilíbrio (azul e vermelho) surgem. Em razão da simetria da seção transversal, estes dois novos braços são coincidentes, existindo entre eles apenas uma diferença de fase, como se verifica na Figura 4.10.

Estes se juntam novamente com a curva preta em PF4. Estes caminhos exibem bifurcações secundárias, levando a um total de 12 pontos de bifurcação pitchfork (PF) e sela-nó (SN) na região de ressonância. Em particular, as soluções são estáveis entre os pontos sela-nó $SN2=SN5$ e $SN3=SN6$. Ao longo destes dois caminhos de equilíbrio, um pequeno braço de soluções estáveis é observado entre $SN1=SN4$ e $PF5=PF7$. Devido às bifurcações secundárias, dois braços adicionais de soluções estáveis (verde e amarelo) aparecem, totalizando 13 braços de soluções (estáveis e instáveis). Além das soluções periódicas, detectou-se também a presença de soluções quase periódicas.

As várias bifurcações identificadas na Figura 4.4 à Figura 4.6 levam à coexistência de várias soluções na mesma faixa de frequências. Para identificar as regiões com multiplicidade de soluções, apresenta-se na Figura 4.7 a faixa de frequências associada a cada um dos braços de soluções.

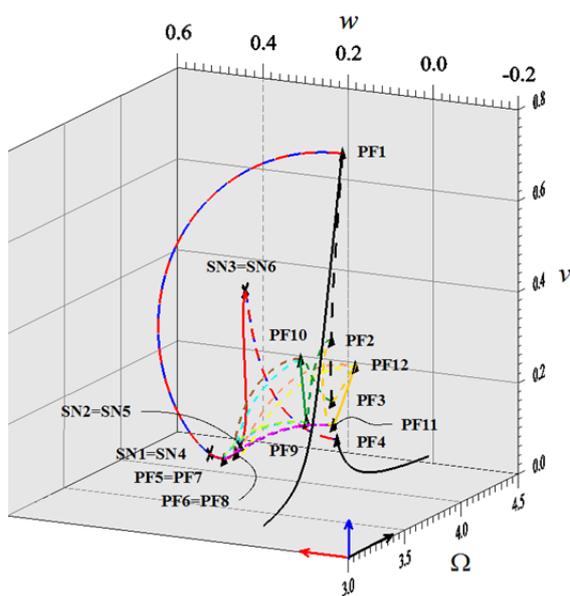


Figura 4.4 – Diagrama de bifurcações no espaço $v - w - \Omega$ para o 8 caso, listados na Tabela 4.1.

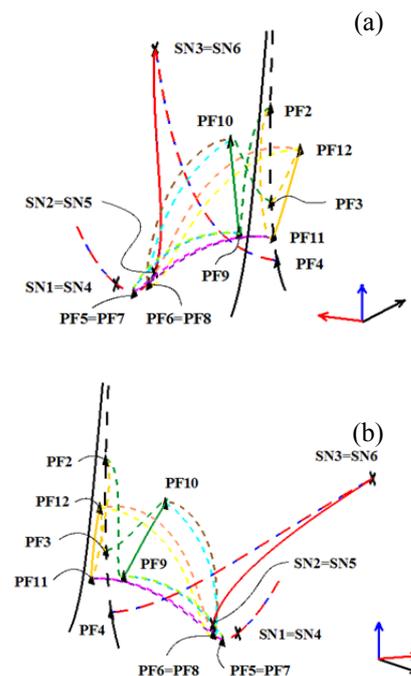
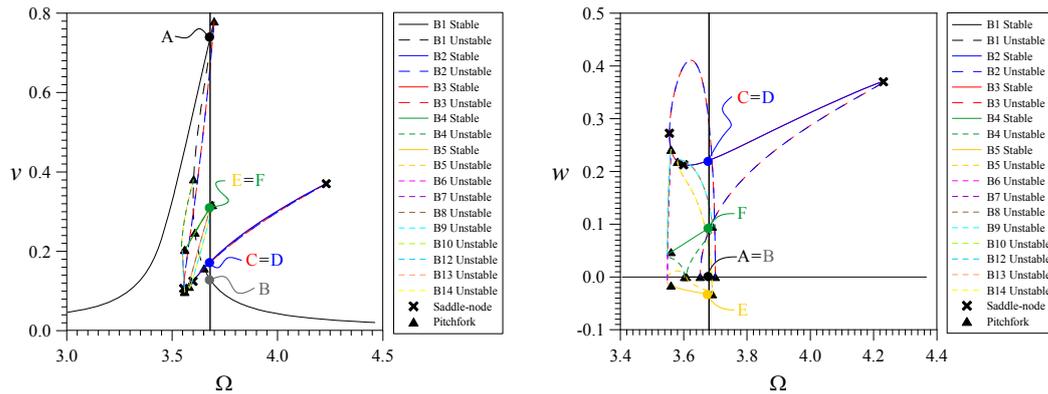
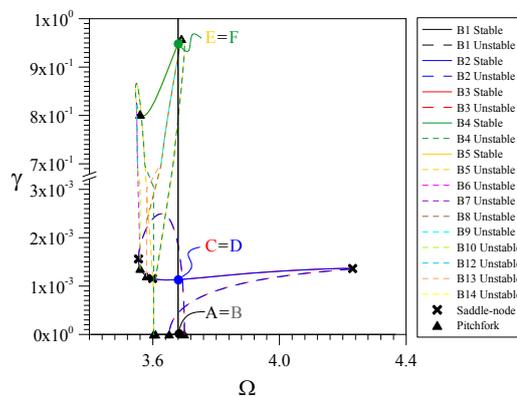


Figura 4.5 – Detalhe da curva de ressonância da Figura 4.4.



(a) Curva de ressonância em v

(b) Curva de ressonância em w



(c) Curva de ressonância em γ

Figura 4.6 – Diagramas de bifurcações, na região de ressonância, para os três graus de liberdade.

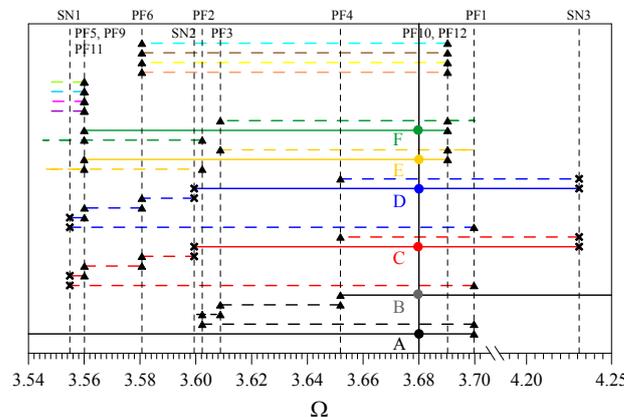


Figura 4.7 – Identificação das soluções coincidentes na região fundamental de ressonância.

Na Tabela 4.3 mostram-se as coordenadas de cada um dos pontos limites presentes na Figura 4.4 à Figura 4.7. As cores usadas para identificar cada um dos braços de soluções na Figura 4.7 são as mesmas usadas nas anteriores. Analisando os resultados verifica-se a coexistência de até seis soluções periódicas estáveis. Está multiplicidade de soluções leva a vários saltos dinâmicos com a variação da frequência da excitação.

Tabela 4.3 – Coordenadas dos pontos limites.

Pontos	Ω	ν	w	γ
PF 1	3.699744	0.779297	0.000000	0.000000
PF 2	3.602310	0.381298	0.000000	0.000000
PF 3	3.608806	0.247141	0.000000	0.000000
PF 4	3.651859	0.156999	0.000000	0.000000
PF 5	3.560053	0.098050	0.240934	0.001359
PF 6	3.580651	0.110800	0.218214	0.001204
PF 7	3.560078	0.098053	0.240873	0.001359
PF 8	3.580616	0.110773	0.218231	0.001203
PF 9	3.559982	0.203630	0.047197	0.802053
PF 10	3.690280	0.316748	0.095805	0.958200
PF 11	3.559979	0.203628	-0.016247	0.802060
PF 12	3.690284	0.316753	-0.032719	0.958189
NS 1	3.554830	0.106473	0.272586	0.001561
NS 2	3.599425	0.124411	0.212701	0.001154
NS 3	4.230993	0.370239	0.369931	0.001360
NS 4	3.554831	0.106470	0.272576	0.001560
NS 5	3.599429	0.124412	0.212701	0.001154
NS 6	4.230993	0.370238	0.369919	0.001360

Na Figura 4.8 mostram-se os diagramas de bifurcações obtidos pelo método da força bruta, aumentando (em azul) e diminuindo (em vermelho) a frequência da excitação. Para detectar os movimentos fora do plano, uma pequena perturbação é adotada na forma: $\nu = w = \gamma = 0,001$ após cada variação da frequência de excitação. Aumentando o valor da frequência da excitação, a estrutura segue o braço ressonante, exibindo movimentos no plano, com amplitude crescente. No ponto PF1 a estrutura salta e, após o salto, exibe movimentos não planares, sendo estes associados aos braços de soluções na cor azul ou vermelho, sendo a solução final dependente das condições iniciais. Aumentando a frequência da excitação, um novo salto ocorre nos pontos SN3=SN6 e, após o salto, a estrutura retorna ao braço não ressonante de soluções associadas com o movimento no plano. Uma diferente sequência de saltos é observada diminuindo a frequência da excitação (vermelho). Se uma perturbação diferente é adotada, tal como $\nu = w = 0,001$ e $\gamma = 0,800$ após cada variação da frequência de excitação, uma diferente sequência de saltos é observada (Figura 4.9). Neste caso, todos os braços de soluções periódicas

apresentadas na Figura 4.4 à Figura 4.7 são visitados durante a variação da frequência da excitação.

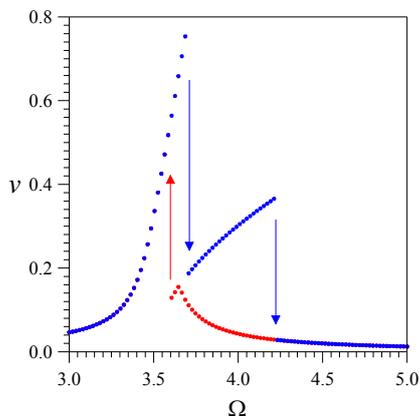
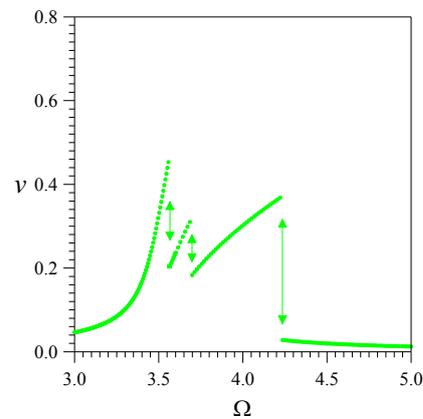
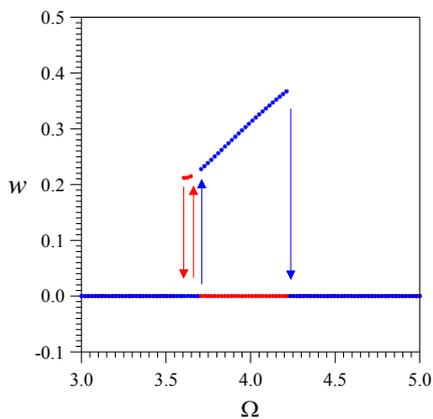
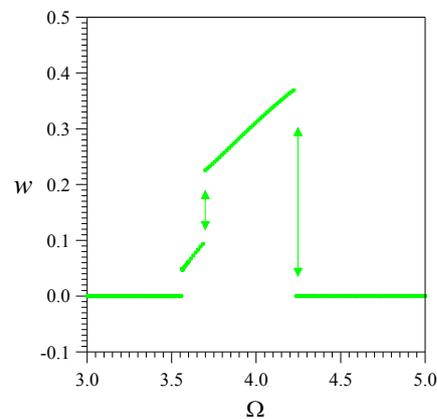
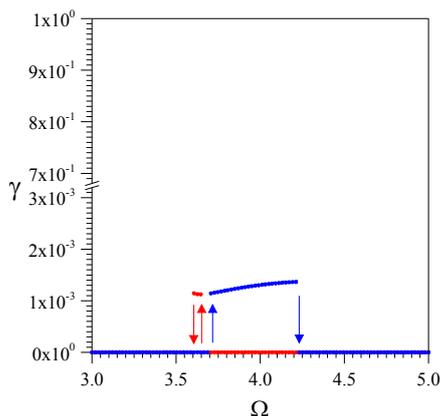
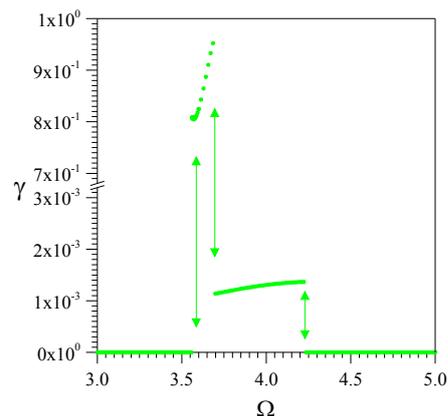
(a) Saltos dinâmicos em v (a) Saltos dinâmicos em v (b) Saltos dinâmicos em w (b) Saltos dinâmicos em w (c) Saltos dinâmicos em γ (c) Saltos dinâmicos em γ

Figura 4.8 – Saltos dinâmicos entre diferentes soluções estáveis incrementando (em azul) e decrescendo (em vermelho) a frequência da excitação. Perturbação $v = w = \gamma = 0,001$.

Figura 4.9 – Saltos dinâmicos entre diferentes soluções estáveis incrementando e decrescendo a frequência da excitação. Perturbação $v = w = 0,001$ e $\gamma = 0,800$.

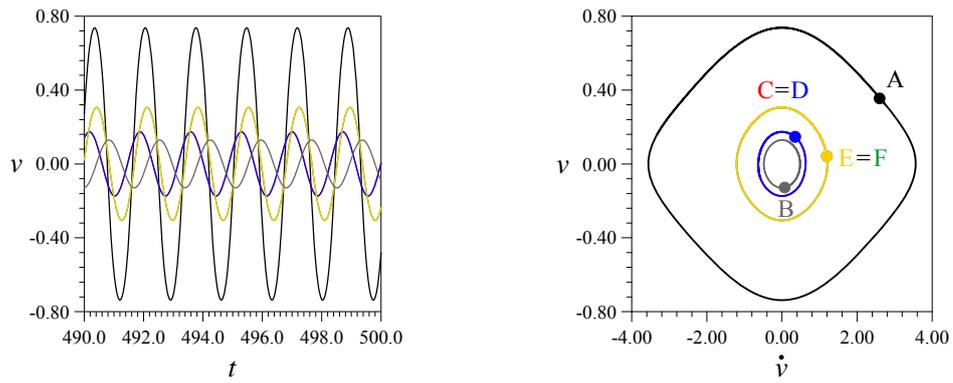
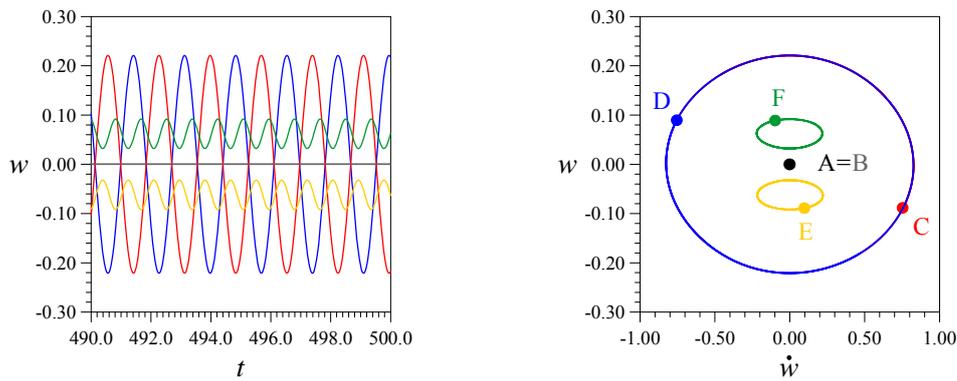
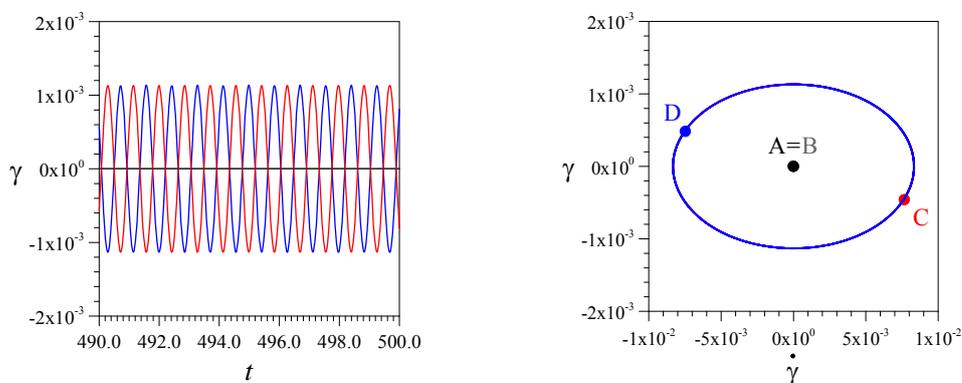
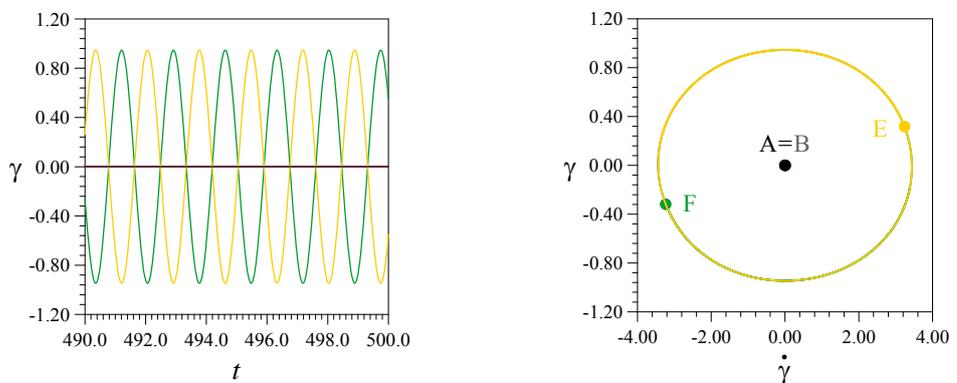
(a) Deslocamento v – Velocidade \dot{v} (b) Deslocamento w – Velocidade \dot{w} (c) Deslocamento γ – Velocidade $\dot{\gamma}$

Figura 4.10 – Resposta no tempo, plano de fase e seções de Poincaré das seis orbitas periódicas detectadas em $\Omega = 3,68$.

As múltiplas soluções detectadas na Figura 4.7 são ilustradas por meio de suas respostas no tempo e planos de fase na Figura 4.10 em $\Omega = 3.68$. Para esta frequência de excitação, verifica-se, tal como observado na Figura 4.6 e na Figura 4.7, seis soluções periódicas estáveis coincidentes.

Os pontos ao longo de cada curva correspondem aos pontos fixos da seção de Poincaré. As soluções A e B correspondem, respectivamente, ao movimento ressonante e não ressonante na direção da excitação, enquanto as soluções C e D correspondem a vibrações fora do plano. Apenas uma diferença de fase entre as soluções C e D (180°) é observada. A solução E (e a espelhada F) estão associadas com vibrações periódicas em torno de uma posição não trivial. Estas soluções podem ser observadas na Figura 4.11, onde se mostra a projeção destas no plano $v - w$.

Na Figura 4.12 apresentam-se quatro seções da bacia de atração para a frequência de excitação $\Omega = 3,68$. Nestas seções todas as demais variáveis do espaço de fase são nulas. Nelas, observam-se quatro regiões distintas associadas a quatro diferentes atratores. Elas são: região preta – vibrações planares de grande amplitude (atrator A na Figura 4.11); região cinza – vibrações planares de pequena amplitude (atrator B na Figura 4.11); e região vermelha e azul – soluções não planares devidas ao acoplamento modal (atratores C e D na Figura 4.11).

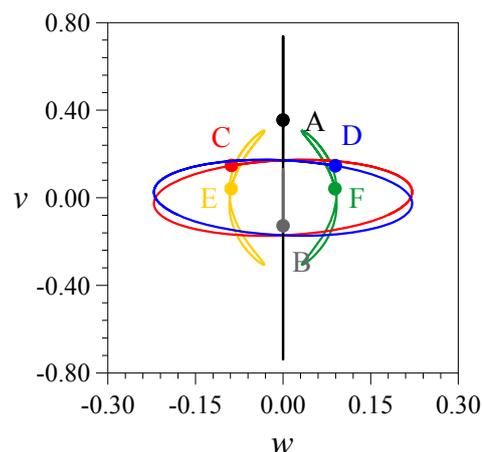


Figura 4.11 – Projeção do plano de fase das seis respostas periódicas observadas em $\Omega = 3,68$.

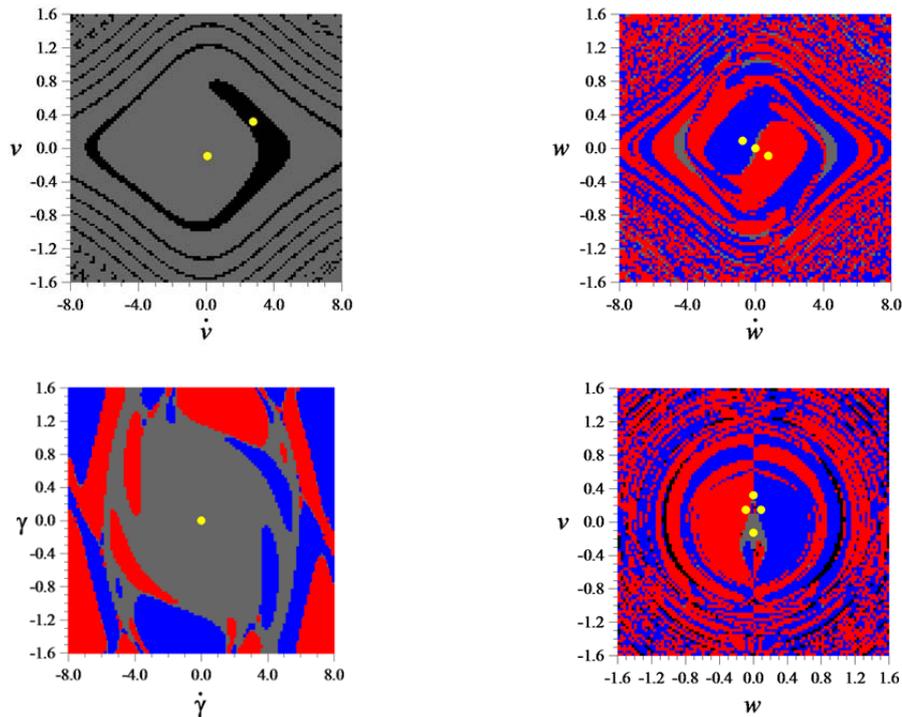


Figura 4.12 – Diferentes projeções da bacia de atração em $\Omega = 3,68$.

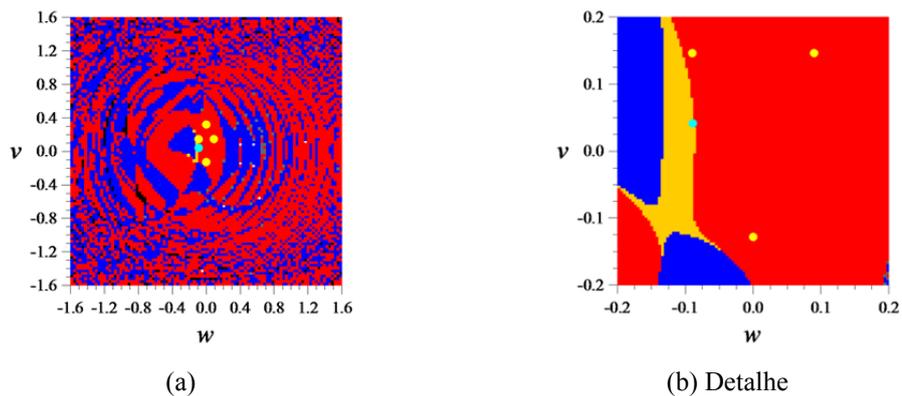
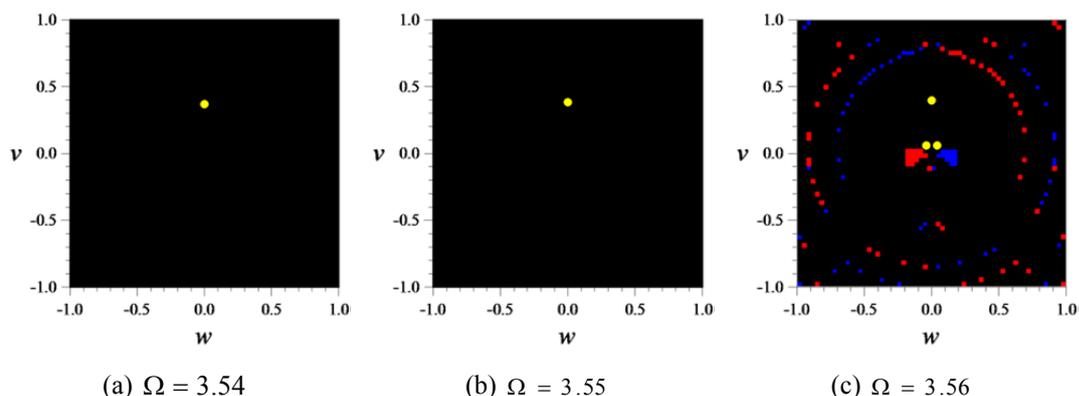


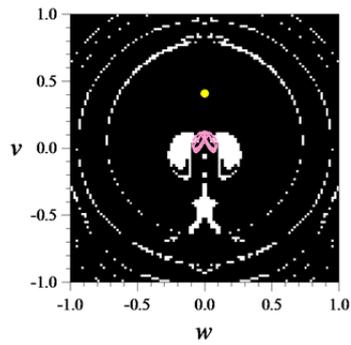
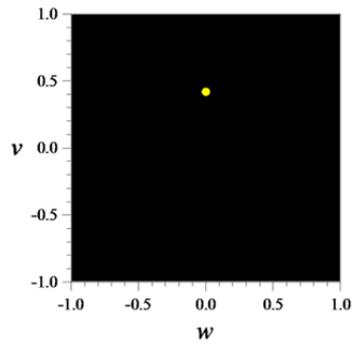
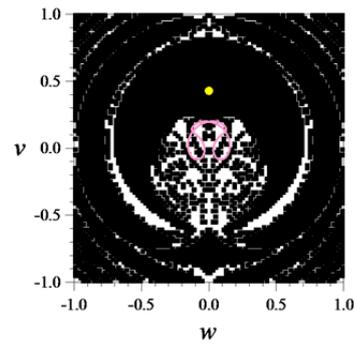
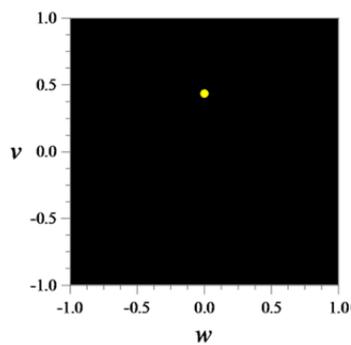
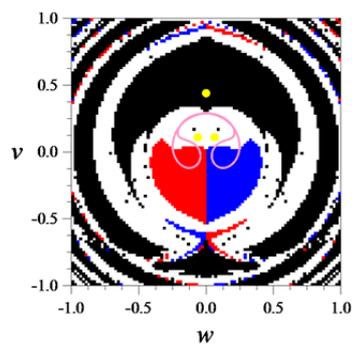
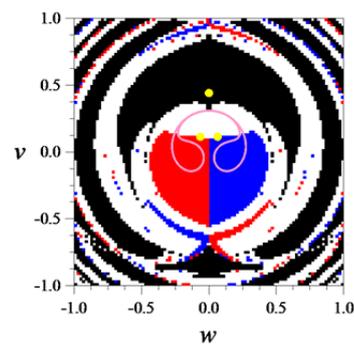
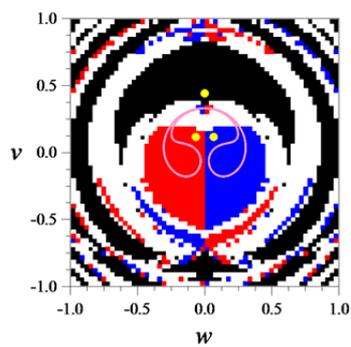
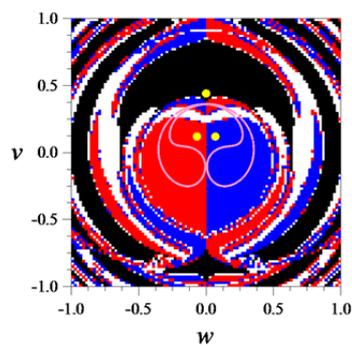
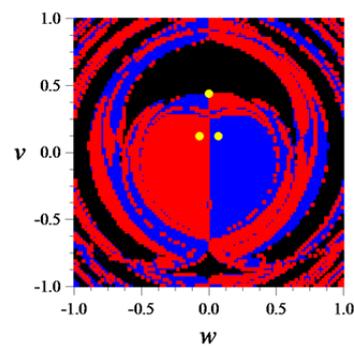
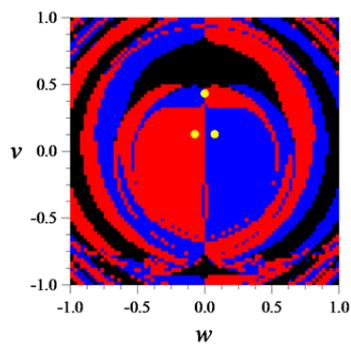
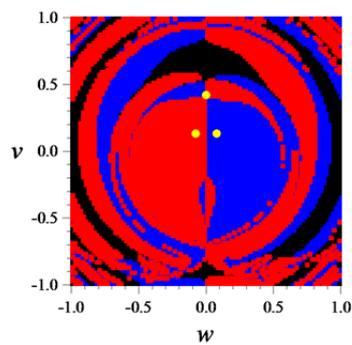
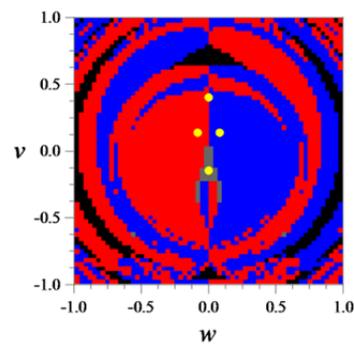
Figura 4.13 – Seções da bacia de atração definida pelo hiperplano $\dot{v}=1.0548$, $\dot{w}=0.1411$, $\dot{\gamma}=4.5741$ e $\gamma=0.4574$, em $\Omega = 3,68$.

Os pontos observados nestas seções correspondem às projeções dos diferentes atratores nestes planos. Se apenas perturbações no plano forem consideradas (plano v vs. \dot{v}), apenas soluções planares (regiões na cor preta e verde) são obtidas, com a maior parte das condições iniciais convergindo para solução de pequena amplitude de vibração. Entretanto, a maioria das condições iniciais envolvendo o deslocamento lateral w leva a movimentos fora do plano (regiões na cor vermelha e azul), sendo as regiões vermelha e azul espelhadas. Os atratores associados às regiões amarela e verde de período $1T$ não são observados nestas projeções.

Na Figura 4.13 mostra-se uma seção da bacia de atração obtida cortando a bacia de atração hexadimensional com o hiperplano definido por $\dot{v}=1.0548$, $\dot{w}=0.1411$, $\dot{\gamma}=4.5741$ e $\dot{\rho}=0.4574$. Nela, verifica-se que um pequeno conjunto de condições iniciais (melhor observado no detalhe da Figura 4.13.b) converge para o atrator E na Figura 4.10 e Figura 4.11. Na Figura 4.14 mostra-se a evolução da bacia de atração incrementando a frequência da excitação de $\Omega = 3.54$ a $\Omega = 4.15$. As soluções contidas dentro desta faixa podem ser observadas na Figura 4.7. Elas são obtidas no plano v vs. w com todas as demais variáveis de estado iguais a zero. Nestas seções movimentos no plano e fora dele são detectados.

Observa-se na Figura 4.14 que, antes de $\Omega = 3.55$ (Figura 4.14.a e Figura 4.14.b) todas as condições iniciais estão associadas ao atrator A referente às vibração planares (região na cor preta). Na Figura 4.14.c, para $\Omega = 3.56$, pequenas regiões nas cores vermelho e azul, associadas respectivamente aos atratores C e D de movimento não planar, aparecem. Em adição aos atratores periódicos (regiões preto, azul e vermelho), para $\Omega = 3.57$ (Figura 4.14.d), uma nova solução (não periódica) aparece, associada à região branca na seção da bacia de atração. Estas condições iniciais convergem para o atrator rosa, o qual aparece também para $\Omega = 3.59$ e de $\Omega = 3.61$ à $\Omega = 3.625$. Na Figura 4.15 mostra-se em detalhe o atrator rosa. Aumentando a frequência da excitação, as condições iniciais associadas à região preta começam a desaparecer, até o atrator B de soluções periódicas no plano (região na cor verde) aparecerem em $\Omega = 3.66$ (Figura 4.14.o). O atrator A desaparece completamente quando $\Omega = 3.70$ (Figura 4.14.s). A partir deste ponto, a região na cor cinza cresce até ocupar completamente a seção da bacia de atração (Figura 4.14.aa).



(d) $\Omega = 3.57$ (e) $\Omega = 3.58$ (f) $\Omega = 3.59$ (g) $\Omega = 3.60$ (h) $\Omega = 3.61$ (i) $\Omega = 3.615$ (j) $\Omega = 3.62$ (k) $\Omega = 3.625$ (l) $\Omega = 3.63$ (m) $\Omega = 3.64$ (n) $\Omega = 3.65$ (o) $\Omega = 3.66$

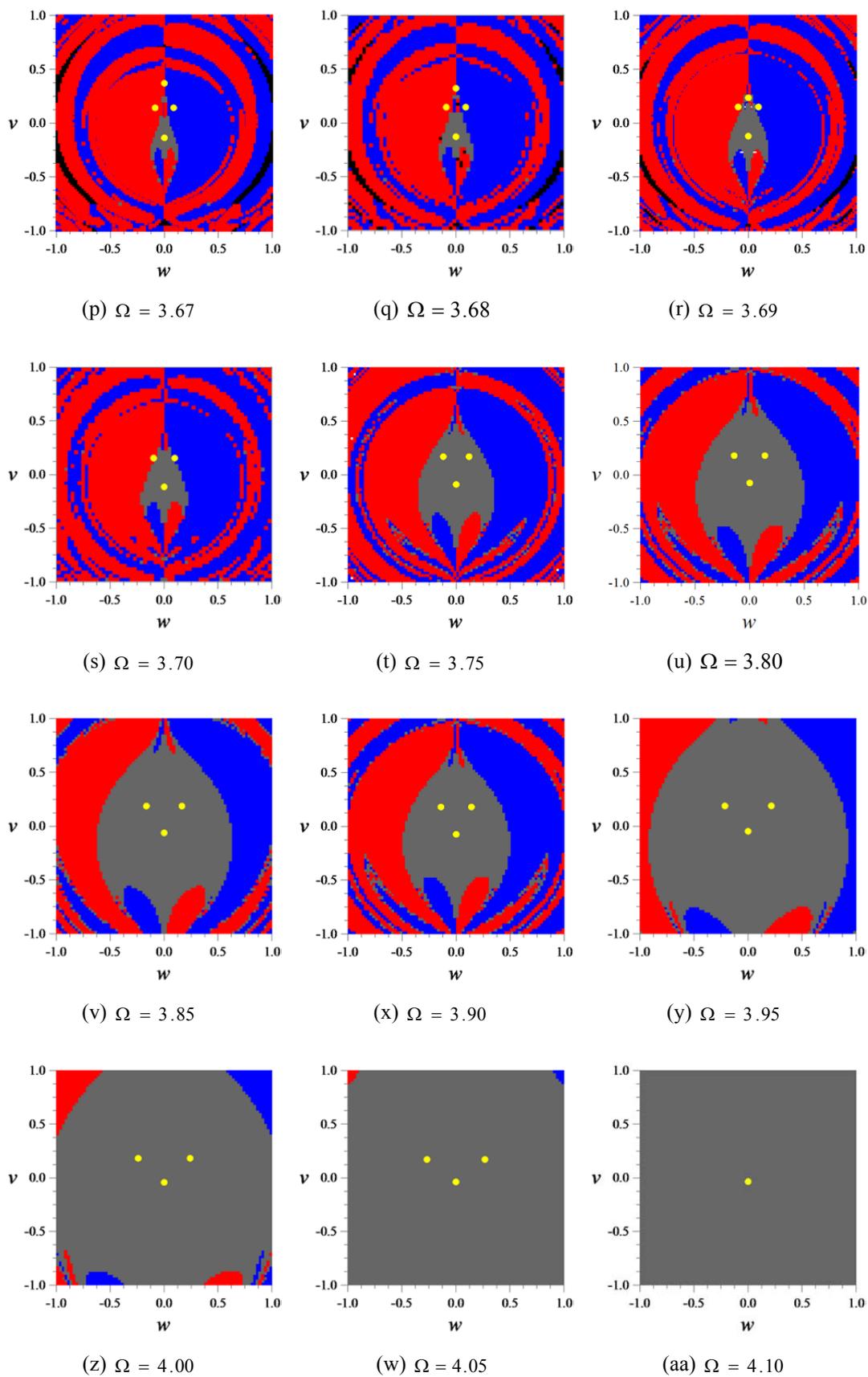


Figura 4.14 – Evolução das bacias de atração incrementando a frequência de excitação ($\gamma = \dot{\nu} = \dot{w} = \dot{j} = 0.0$).

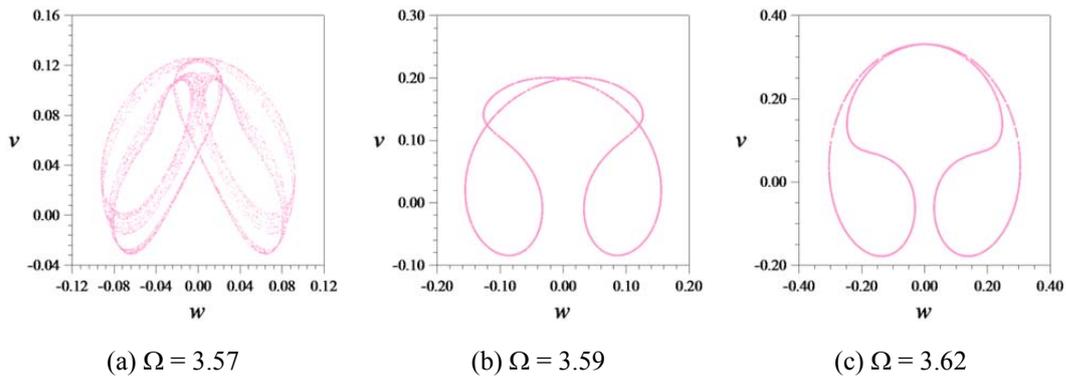


Figura 4.15 – Atrator rosa associado à região branca nas seções da bacia de atração da Figura 4.25.

Na Figura 4.16 apresentam-se algumas respostas no tempo, planos de fase, seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov da órbita com coordenadas iniciais $\gamma = \dot{v} = \dot{w} = \dot{\gamma} = 0.0$, $v = -0.19$ e $w = 0.11$, que pertencem à região branca da Figura 4.14.d ($\Omega = 3.57$). Isto corresponde à solução quase periódica, confirmada pela evolução dos expoentes de Lyapunov (Figura 4.16). Soluções quase periódicas também são encontrada considerando as coordenadas $\gamma = \dot{v} = \dot{w} = \dot{\gamma} = 0.0$, $v = -0.51$ e $w = 0.41$ para $\Omega = 3.59$ (Figura 4.17) e $\gamma = \dot{v} = \dot{w} = \dot{\gamma} = 0.0$, $v = -0.15$ e $w = -0.73$ para $\Omega = 3,62$ (Figura 4.18). Na Figura 4.19 apresenta-se o diagrama de bifurcações associado com estas soluções.

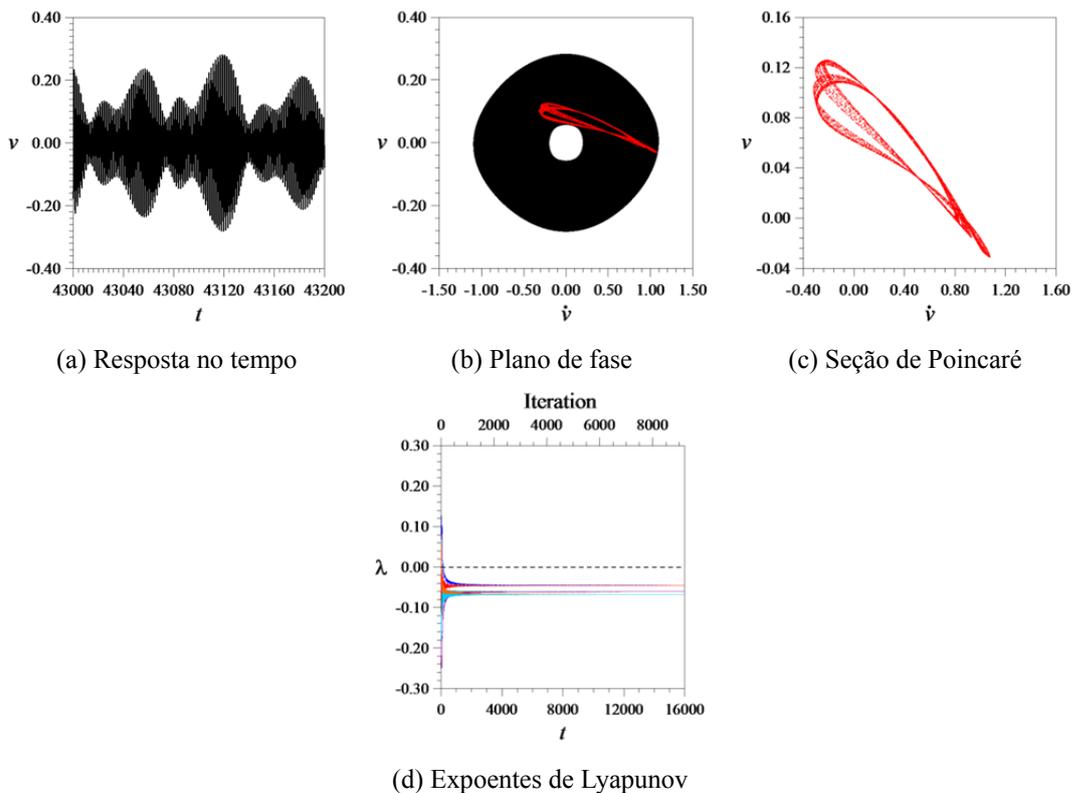


Figura 4.16 – Comportamento dinâmico do atrator quase periódico na Figura 4.25.d. $\Omega = 3.57$, $\gamma = \dot{v} = \dot{w} = \dot{\gamma} = 0.0$, $v = -0.19$ e $w = 0.11$.

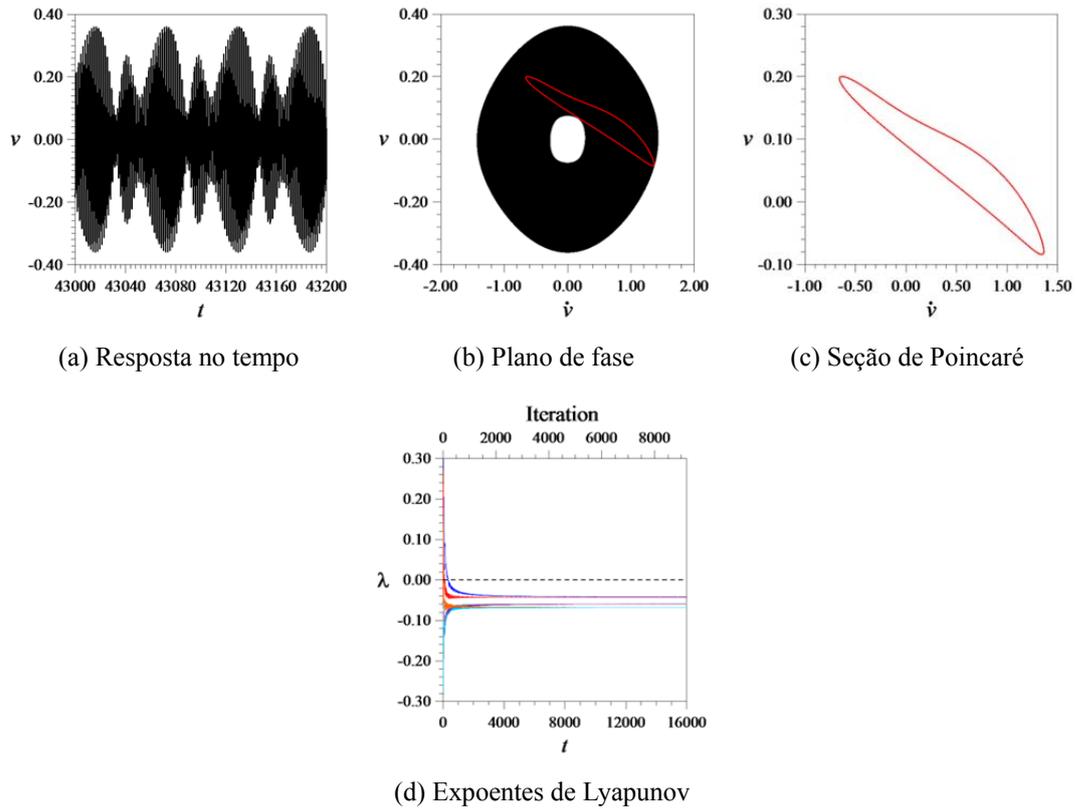


Figura 4.17 – Comportamento dinâmico do atrator quase periódico na Figura 4.25.f. $\Omega = 3.59$, $\gamma = \dot{v} = \dot{w} = \dot{\gamma} = 0.0$, $v = -0.51$ e $w = 0.41$.

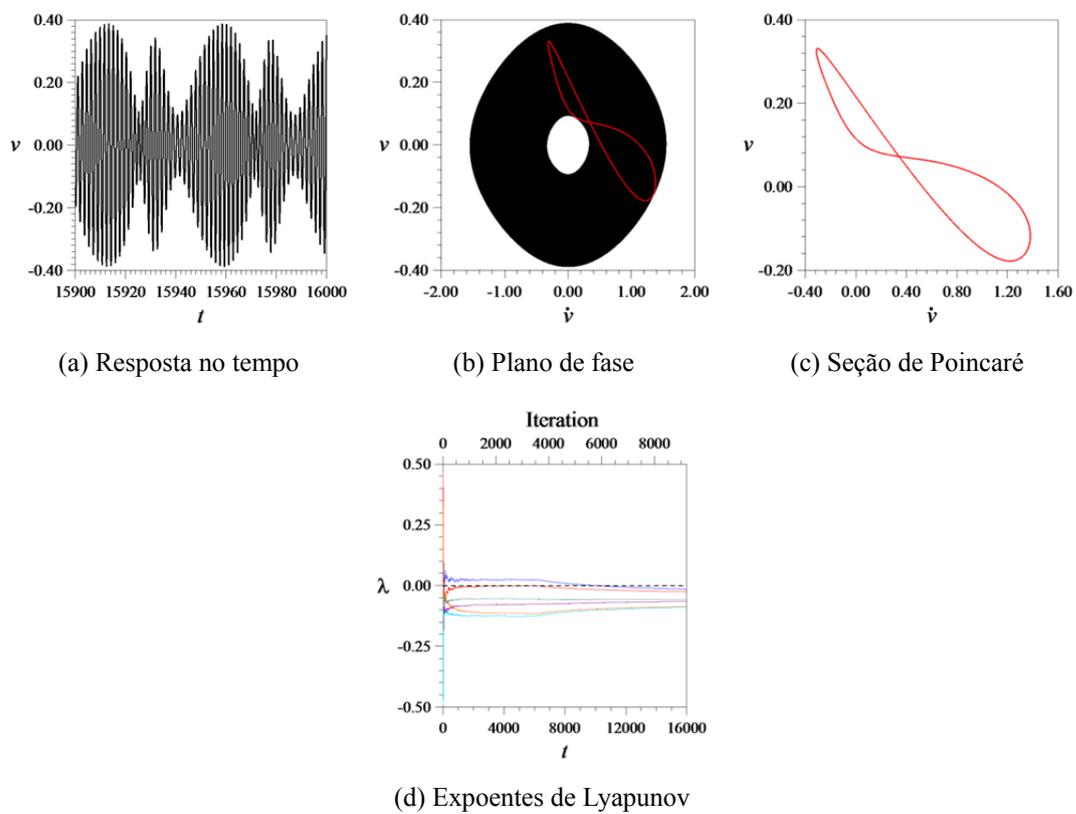


Figura 4.18 – Comportamento dinâmico do atrator quase periódico na Figura 4.25.j. $\Omega = 3.62$, $\gamma = \dot{v} = \dot{w} = \dot{\gamma} = 0.0$, $v = -0.15$ e $w = -0.73$.

Na Figura 4.20 mostra-se uma seção da bacia de atração no plano v vs. w para $\Omega = 3,62$, definida pelo hiperplano $\dot{v} = 1.0548$, $\dot{w} = 0.1411$, $\gamma = 0.4574$ e $\dot{\gamma} = 4.5741$. Nesta seção verifica-se a presença das seis soluções periódicas, bem como da solução quase periódica.

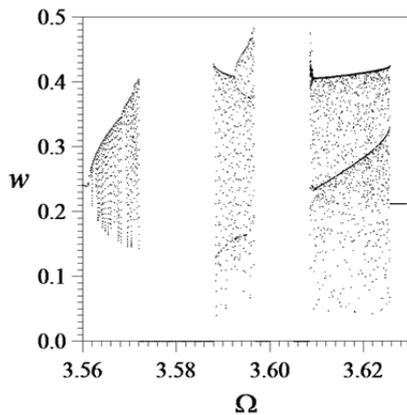


Figura 4.19 – Diagrama de bifurcações. Janela de soluções quase periódicas exemplificadas na Figura 4.16 à Figura 4.18.

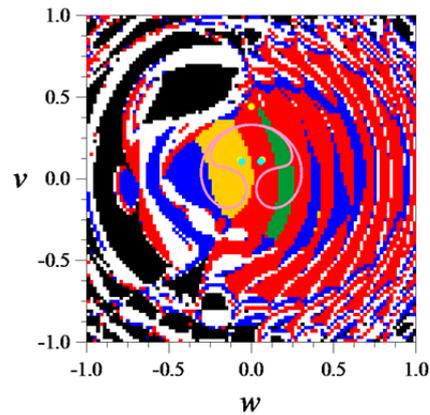


Figura 4.20 – Seção da bacia de atração definida pelo hiperplano $\dot{v} = 1.0548$, $\dot{w} = 0.1411$, $\gamma = 0.4574$ e $\dot{\gamma} = 4.5741$ para $\Omega = 3.62$.

Devido à complexidade da bacia, uma grande sensibilidade à variação das condições iniciais é esperada, levando a súbitas variações no comportamento da estrutura (imprevisibilidade) e medidas de integridade dinâmicas reduzidas.

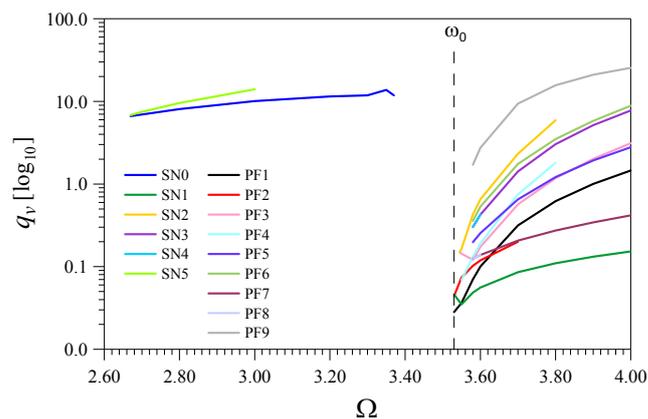


Figura 4.21 – Fronteira de instabilidade próxima à região de ressonância interna 1:1:1.

A Figura 4.21 traz a fronteira de instabilidade da estrutura. Nela, observam-se claramente dois diferentes comportamentos. Um quando a frequência de excitação é menor que a menor frequência natural de vibração da barra ($\Omega < \omega_0$) e outro quando ela é maior ($\Omega > \omega_0$).

Para auxiliar no entendimento, na Figura 4.22 e Figura 4.23 apresentam-se alguns diagramas de bifurcações considerando diferentes frequências de excitação. Nestes casos, a amplitude da excitação q_v é o parâmetro de controle. Para $\Omega = 2,65$ (Figura 4.22.a) não são detectados pontos de bifurcação. Pontos limite aparecem quando $\Omega = 2,67$ (Figura 4.22.b), mostrando um par de pontos sela-nó (SN0 e SN5), os quais são coincidentes no referido diagrama.

Na Figura 4.22.c e Figura 4.22.d ($\Omega = 2,80$ e $\Omega = 3,00$, respectivamente), aumentando a frequência da excitação, os pontos SN0 e SN5 afastam-se um do outro. Na Figura 4.22.e o ponto SN5 é omitido porque possui deslocamentos maior do que a unidade e na Figura 4.22.f omite-se o ponto SN0 pela mesma razão. Considerando $\Omega = \omega_0$ (Figura 4.23.a) aparecem no diagrama de bifurcações os primeiros pontos de bifurcação pitchfork, chamados PF1 e PF2, assim como o ponto sela-nó SN1. Para $\Omega = 3,55$ (Figura 4.23.b) três novos pontos de bifurcação aparecem (PF3, PF6 e SN2).

A partir daí, para $\Omega = 3,58$ (Figura 4.23.c), sete novos pontos de bifurcação aparecem. Eles são PF5, PF6, PF7, PF8, PF9, SN3 e SN4. O ponto de bifurcação PF2 acusa deslocamentos maiores que a unidade para $\Omega = 3,80$ (Figura 4.23.e). Para esta frequência os pontos PF8 e SN4 não mais existem. Finalmente, quando $\Omega = 4,00$ (Figura 4.23.f) os pontos PF4 e SN2 também deixam de existir.

Como dito anteriormente, como as equações de movimento são adimensionais, o que realmente importa é a relação entre os coeficientes de inércia e rigidez da barra à medida que se varia as dimensões da seção transversal. Estuda-se agora uma barra onde se decresce a dimensão $a=b$, mantendo-se $L=25b$ e aumentando-se a espessura e de modo a manter a área da seção transversal constante. Treze casos são apresentados na Tabela 4.4 cobrindo a região onde a ressonância interna 1:1:1 ocorre.

Novamente, observa-se que as frequências de flexão (ω_v e ω_w) permanecem praticamente constantes, enquanto a frequência de torção (ω_γ) cresce com a diminuição de $a=b$ e o conseqüente aumento da espessura da parede e . Nota-se que entre os casos 7 e 8 têm-se a ressonância interna 1:1:1.

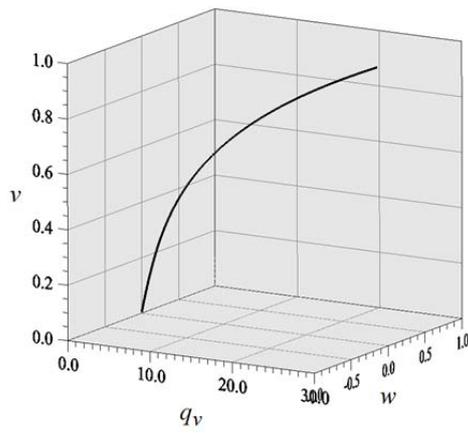
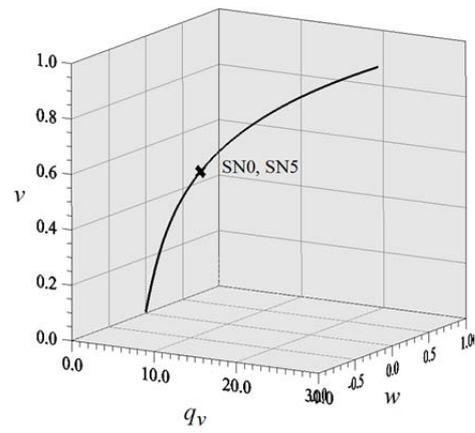
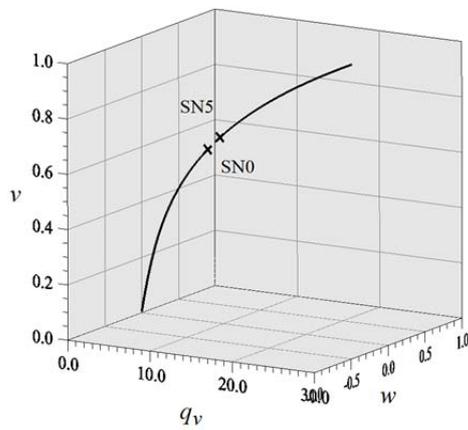
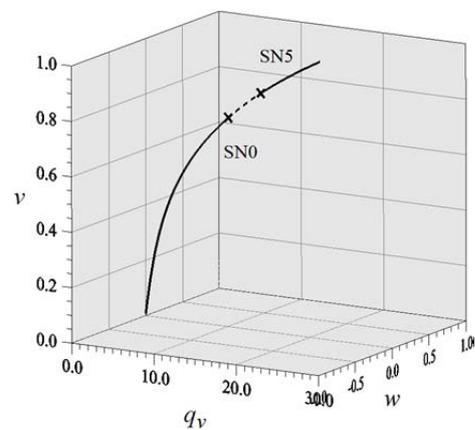
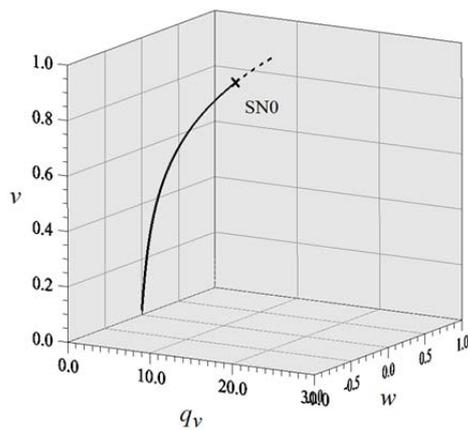
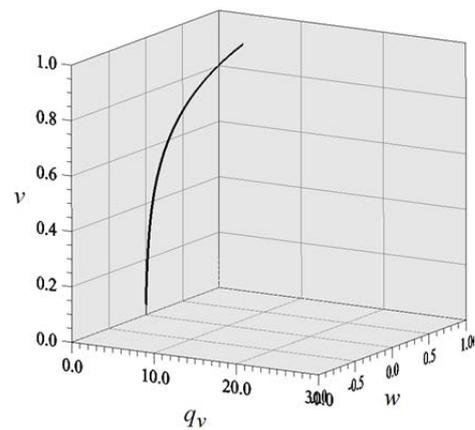
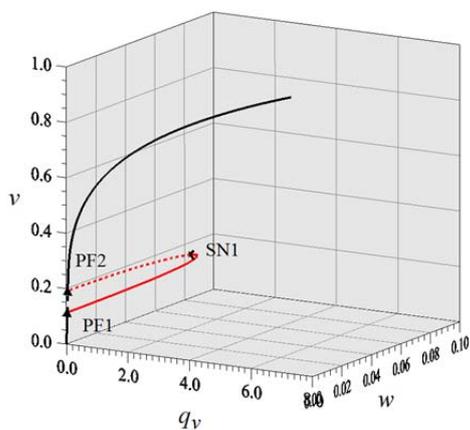
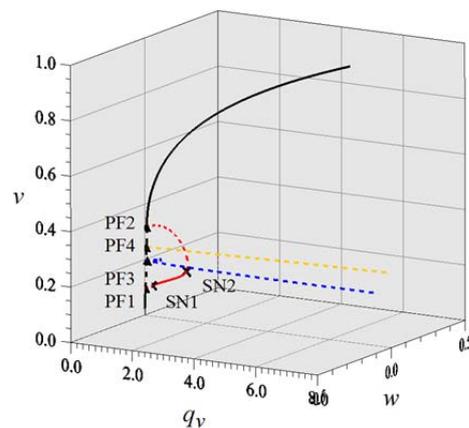
(a) Curva de ressonância para $\Omega = 2.65$ (b) Curva de ressonância para $\Omega = 2.67$ (c) Curva de ressonância para $\Omega = 2.80$ (d) Curva de ressonância para $\Omega = 3.00$ (e) Curva de ressonância para $\Omega = 3.20$ (f) Curva de ressonância para $\Omega = 3.40$

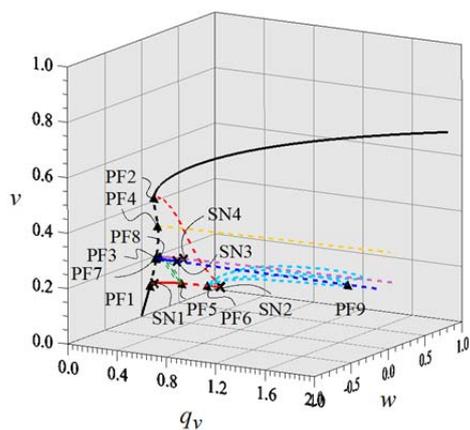
Figura 4.22 – Diagramas de bifurcações na região de ressonância interna 1:1:1, considerando $2.60 \leq \Omega < \omega_0$.



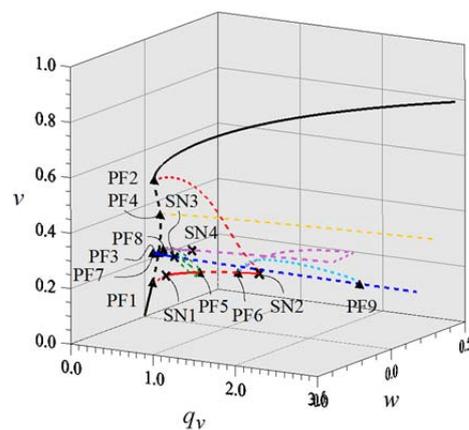
(a) Curva de ressonância para $\Omega = \omega_0$



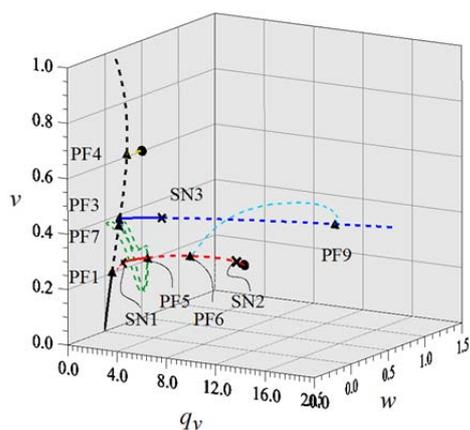
(b) Curva de ressonância para $\Omega = 3.55$



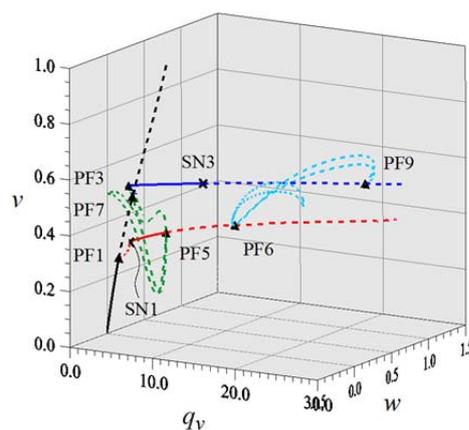
(c) Curva de ressonância para $\Omega = 3.58$



(d) Curva de ressonância para $\Omega = 3.60$



(e) Curva de ressonância para $\Omega = 3.80$



(f) Curva de ressonância para $\Omega = 4.00$

Figura 4.23 – Diagramas de bifurcações na região de ressonância interna 1:1:1, considerando $\Omega \geq \omega_0 < 4,00$.

Tabela 4.4 – Seções em forma de cruz adicionais.

Caso	Dimensões					Frequência natural		
	b	h	L	A	e	ω_v	ω_w	ω_γ
1	5.00	b	$25b$	1.0	0.10102	3.51584	ω_v	0.68184
2	4.00	b	$25b$	1.0	0.12702	3.51584	ω_v	1.34294
3	3.50	b	$25b$	1.0	0.14590	3.51584	ω_v	2.01901
4	3.00	b	$25b$	1.0	0.17157	3.51586	ω_v	3.24176
5	2.95	b	$25b$	1.0	0.17466	3.51586	ω_v	3.41423
6	2.94	b	$25b$	1.0	0.17529	3.51586	ω_v	3.45022
7	2.93	b	$25b$	1.0	0.17593	3.51586	ω_v	3.48655
8	2.92	b	$25b$	1.0	0.17657	3.51586	ω_v	3.52363
9	2.91	b	$25b$	1.0	0.17466	3.51586	ω_v	3.56118
10	2.90	b	$25b$	1.0	0.17787	3.51586	ω_v	3.59917
11	2.50	b	$25b$	1.0	0.20871	3.51586	ω_v	5.70526
12	2.25	b	$25b$	1.0	0.23446	3.51586	ω_v	7.93776
13	2.00	b	$25b$	1.0	0.26795	3.51586	ω_v	11.52996

4.3.

Variável escrava

Para simplificar o estudo do movimento não linear acoplado de flexão-flexão-torção, como comentado no Capítulo 2, geralmente define-se o ângulo de torção γ em função dos deslocamentos laterais v e w da barra. Nesta seção verifica-se a veracidade desta hipótese na presença da ressonância interna 1:1:1. Para tanto, consideram-se duas das doze barras com seção em forma de cruz dadas na Tabela 4.1, mais especificamente os casos 5 e 10, cujas propriedades são rerepresentadas na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Seções em forma de cruz investigadas no estudo da variável escrava.

Caso	Dimensões				Frequência natural		
	b	h	L	e	ω_v	ω_w	ω_γ
5	4	b	$25b$	$b/17$	3.516	ω_v	3.381
10	4	b	$25b$	$b/14.55$	3.516	ω_v	4.267

Tomando inicialmente o caso 10 da Tabela 4.5, as equações não lineares de movimento são:

$$\ddot{v} + c_\gamma \dot{v} + 12,3610v - 6,5976\gamma w + 40,4350(vw^2 + v^3) + 4,5968(\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v\ddot{v} + w\ddot{w})v - 0,7830q_v \cos(\Omega_v t) = 0 \quad (4.7)$$

$$\ddot{w} + c_\gamma \dot{w} + 12,3610w + 6,5976\gamma v + 40,4350(wv^2 + w^3) + 4,5968(\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w\ddot{w} + v\ddot{v})w - 0,7830q_w \cos(\Omega_w t) = 0 \quad (4.8)$$

$$\ddot{\gamma} + c_\gamma \dot{\gamma} + 18,2070\gamma + 2,6739(\ddot{v}w - v\ddot{w}) = 0 \quad (4.9)$$

Quando as rotações devidas à torção são muito pequenas, espera-se que os termos na Equação (4.9) envolvendo a velocidade $\dot{\gamma}$, bem como, o termo de aceleração $\ddot{\gamma}$, possam ser desprezados e a variável γ possa ser escrita como uma função de v e w , ou seja:

$$\gamma = 0,146861(v\ddot{w} - \ddot{v}w) \quad (4.10)$$

Substituindo a Equação (4.10) nas Equações (4.7) e (4.8), chega-se ao sistema de equações com dois graus de liberdade (v , w) que governa o movimento não linear da barra engastada-livre, dado por:

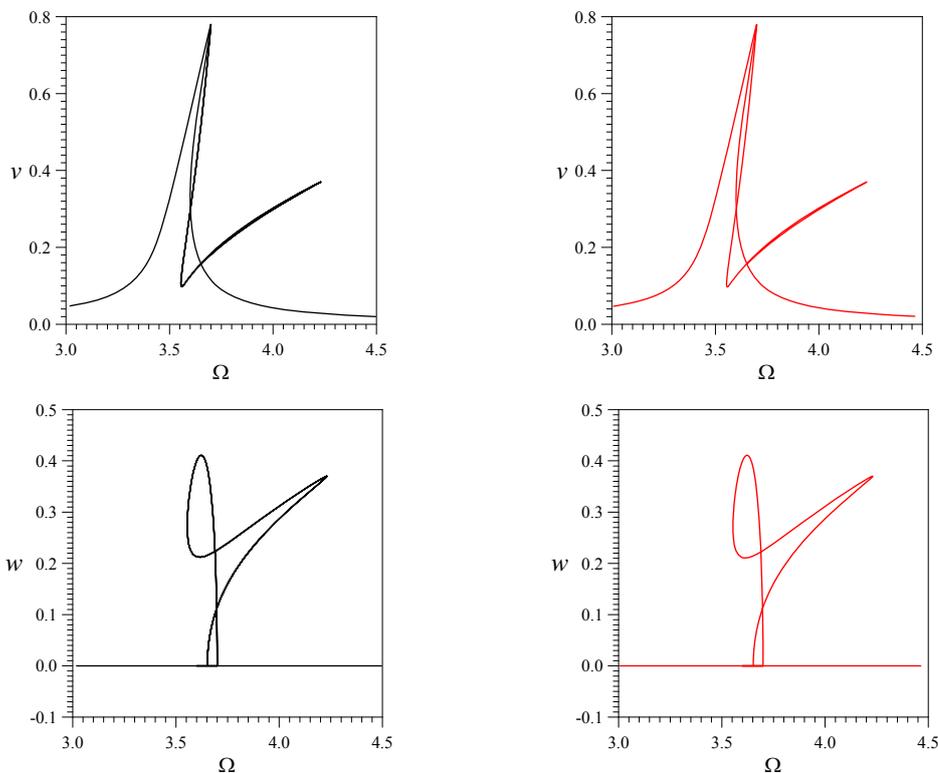
$$\ddot{v} + c_\gamma \dot{v} + 12,3610v - 6,5976 [0,146861(v\ddot{w} - \ddot{v}w)]w + 40,4350(vw^2 + v^3) + 4,5968(\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + v\ddot{v} + w\ddot{w})v - 0,7830q_v \cos(\Omega_v t) = 0 \quad (4.11)$$

$$\ddot{w} + c_\gamma \dot{w} + 12,3610w + 6,5976 [0,146861(v\ddot{w} - \ddot{v}w)]v + 40,4350(wv^2 + w^3) + 4,5968(\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + w\ddot{w} + v\ddot{v})w - 0,7830q_w \cos(\Omega_w t) = 0 \quad (4.12)$$

onde, γ é agora uma variável escrava,

Para fins de comparação, adota-se novamente uma barra com solicitação lateral harmônica com $q_v = 0,2$. Na Figura 4.24 apresenta-se a variação dos deslocamentos máximos v e w da barra, considerando a formulação com três graus de liberdade (v, w, γ) e a formulação com dois graus de liberdade (v, w) .

Os resultados coincidentes atestam, portanto, a viabilidade de se utilizar uma formulação com dois graus de liberdade, sendo γ uma variável escrava. Cabe ressaltar que a variável escrava pode, a partir da Equação (4.10) e a qualquer instante, ser recuperada. É importante mencionar que esta simplificação é diferente daquela proposta por Crespo da Silva e Glynn (1978.b).



(a) Sistema com três graus de liberdade

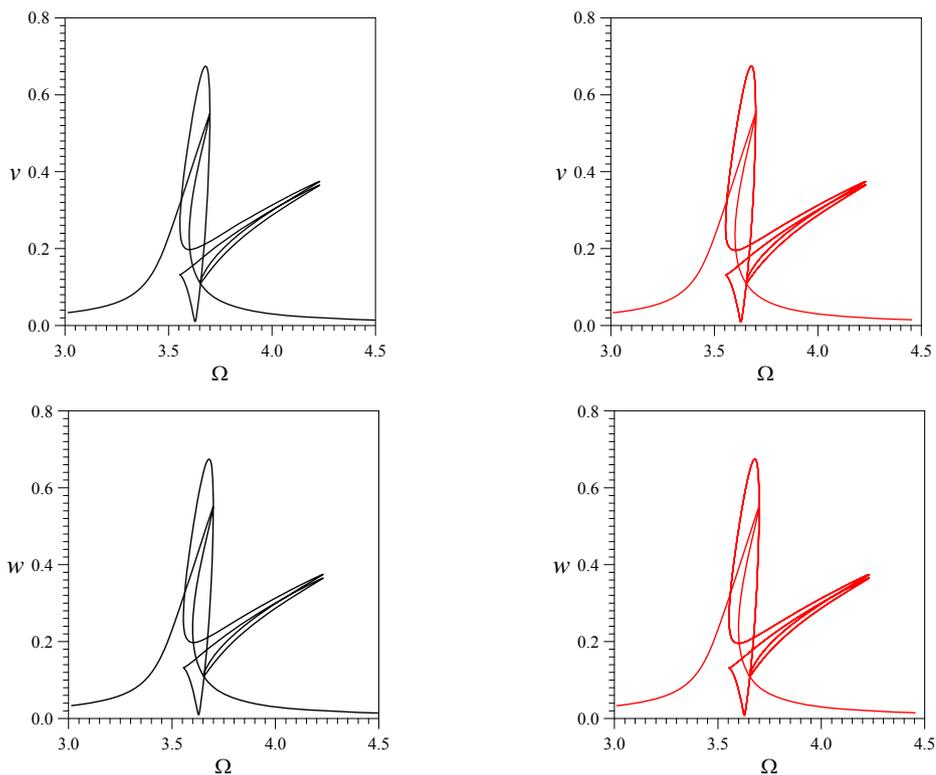
(b) Sistema com dois graus de liberdade

Figura 4.24 – Comparação entre os diagramas de bifurcação considerando três e dois graus de liberdade. Barra com seção transversal em cruz, $\omega_\gamma = 3,381$, amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ e solicitações $q_v = 0,20$ e $q_w = 0,00$. Caso 10.

Em adição, apresenta-se na Figura 4.25 os diagramas de bifurcação para barra com solicitação lateral harmônica com $q_v = q_w = 0,1414213562$ (solicitação à 45°), tanto para o sistema com três quanto para o sistema com dois graus de liberdade. Nota-se que, como na flexão simples, os diagramas de bifurcação da Figura 4.25.b, obtidos a partir das Equações (4.11) e (4.12) em flexão oblíqua, são os mesmo vistos na Figura 4.25.a. Estes resultados mostram que, quando a inércia

à torção é desprezível, pode-se analisar o comportamento do sistema usando um modelo de ordem reduzida, o que diminui o trabalho computacional e permite o uso mais eficiente dos mapas de Poincaré para sistemas Hamiltonianos (Orlando, 2010).

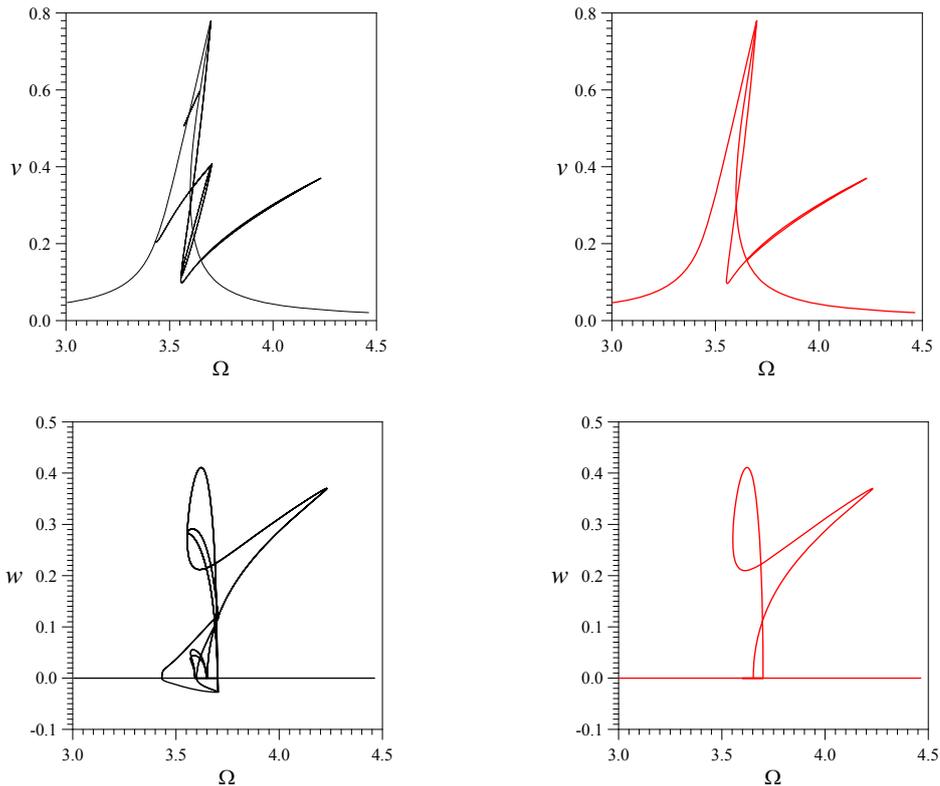
Tomando agora o caso 5 da Tabela 4.5, busca-se da mesma maneira definir o grau de liberdade γ de torção em função dos graus de liberdade v e w de flexão. Na Figura 4.26 apresentam-se os diagramas de bifurcação no espaço da variável de estado v e do parâmetro de controle Ω . Observa-se nos diagramas da Figura 4.26 que, em virtude da menor rigidez à torção, as curvas de ressonância obtidas a partir do sistema com dois graus de liberdade, diferem de forma significativa das obtidas a partir do sistema com três graus de liberdade, o que ressalta a importância de se considerar o efeito da torção no movimento não linear de barras esbeltas com baixa rigidez à torção.



(a) Sistema com três graus de liberdade

(b) Sistema com dois graus de liberdade

Figura 4.25 – Comparação entre os diagramas de bifurcação considerando três e dois graus de liberdade. Barra com seção transversal em cruz, $\omega_\gamma = 3,381$, amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ e solicitações $q_v = q_w = 0,14142135$. Caso 10.



(a) Sistema com três graus de liberdade

(b) Sistema com dois graus de liberdade

Figura 4.26 – Comparação entre os diagramas de bifurcação considerando três e dois graus de liberdade. Barra com seção transversal em cruz, $\omega_\gamma = 4,267$, amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 5\%$ e solicitações $q_v = q_w = 0,14142135$. Caso 5.

Mostra-se com estes resultados que a simplificação empregada nesta seção só é possível quando as frequências de torção são bem maiores que as de flexão, afastando-se da região de ressonância 1:1:1.

4.4.

Carga axial

O foco deste item está no estudo da influência das cargas concentradas no comportamento não linear dinâmico de barras esbeltas, altamente flexíveis e com baixa rigidez à torção. Na seção 4.4.1, a relação frequência vs. amplitude é obtida, considerando apenas a parcela estática P_s da carga axial. Na seção 4.4.2, a instabilidade paramétrica é analisada, considerando apenas a parcela dinâmica $q_u \cos(\Omega_u t)$ da carga axial. Na seção 4.4.3, a influência da carga estática na instabilidade paramétrica é estudada, considerando simultaneamente, as parcelas

estática e dinâmica da carga axial, isto é, $P_s + q_u \cos(\Omega_u t)$. Finalmente, na seção 4.4.4, estuda-se a influência da carga axial estática nas curvas de ressonância, considerando a parcela estática P_s da carga axial e uma carga lateral harmônica, uniformemente distribuída, dada por $q_v \cos(\Omega_v t)$. Para estes estudos adota-se o Caso 8 da Tabela 4.1.

4.4.1.

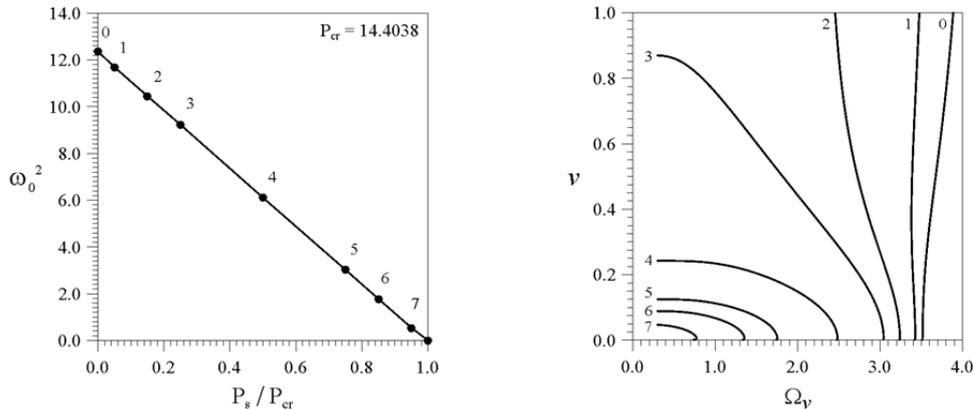
Influência da carga axial estática na relação frequência amplitude

A menor frequência natural de vibração da barra é $\omega_0 = 3,5161$, enquanto sua carga crítica é $P_{cr} = (\pi^2 EI / 4L^2) = 14,4038$. Na Figura 4.27.a verifica-se que, enquanto a carga axial aumenta, o quadrado da frequência natural diminui linearmente, tornando-se zero quando ela alcança o valor crítico. Em adição, na Figura 4.27.b verifica-se a influência da carga axial na relação frequência vs. amplitude. Tal como na barra com elevada rigidez à torção, a barra não carregada exibi um pequeno grau de não linearidade geométrica com modesto ganho de rigidez (comportamento *hardening*). Com o aumento da carga, o grau de não linearidade geométrica diminui e o de não linearidade inercial aumenta. Conseqüentemente, para certo nível de carga, a curva começa a inclinar-se para a esquerda (comportamento *softening*). Para níveis elevados de carga, uma forte perda de rigidez é observada.

4.4.2.

Instabilidade paramétrica nas regiões principal e fundamental de ressonância

Agora, o comportamento dinâmico não linear da barra engastada livre, sujeita apenas a uma carga axial harmônica, é estudado. Para tanto, adota-se $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$.



(a) Relação carga vs. frequência

(b) Relação frequência vs. amplitude

Figura 4.27 – Influência da carga axial estática na menor frequência natural de vibração e na relação frequência vs. amplitude da barra.

Na Figura 4.28 apresenta-se a curva de instabilidade paramétrica da barra no espaço de controle da força (frequência Ω_u vs. magnitude q_u da excitação). A primeira região importante de instabilidade paramétrica está associada com a ressonância fundamental ($\omega_0 = 3,5161$) e a segunda, à direita, está associada com a região principal de instabilidade paramétrica que ocorre quando a frequência da excitação é duas vezes maior que a frequência de vibração da barra ($2\omega_0 = 7,0322$).

Para ampliar o entendimento a respeito da perda de estabilidade da barra e das bifurcações associadas com a fronteira de instabilidade paramétrica, um estudo do movimento tridimensional da barra nas duas regiões mais importantes de instabilidade paramétrica ($\Omega_u = 2\omega_0$ e $\Omega_u = \omega_0$) é apresentado a seguir. Como ponto de partida, mostram-se na Figura 4.29 os diagramas de bifurcações na vizinhança da frequência principal ($\Omega_u = 2\omega_0$). Estes diagramas foram obtidos usando-se o método da continuação, tomando como parâmetro de controle a amplitude q_u da excitação. Verifica-se que ambos os lados (descendente e ascendente) da curva de instabilidade paramétrica estão associados com bifurcações por duplicação de período. Para $1,986\omega_0 < \Omega_u < 2,000\omega_0$ verifica-se que a solução trivial perde a estabilidade por meio de uma bifurcação estável, sendo fora deste intervalo instável.

Na Figura 4.30 apresenta-se o diagrama de bifurcação para $\Omega_u = 2\omega_0$ obtido com o método da força bruta, razão pela qual os braços de soluções instáveis não são identificados. Na Figura 4.30.a mostra-se a variação dos pontos fixos do mapa

de Poincaré para os deslocamentos transversais v e w , os quais são análogos. Neste diagrama, dois tipos de soluções são identificados: uma solução trivial (T) e um não trivial (NT) de período dois (duas vezes a frequência da excitação). Na Figura 4.30.b mostram-se os resultados para o ângulo de torção, os quais, neste caso, são desprezíveis, justificando o fato dos deslocamentos transversais v e w serem análogos.

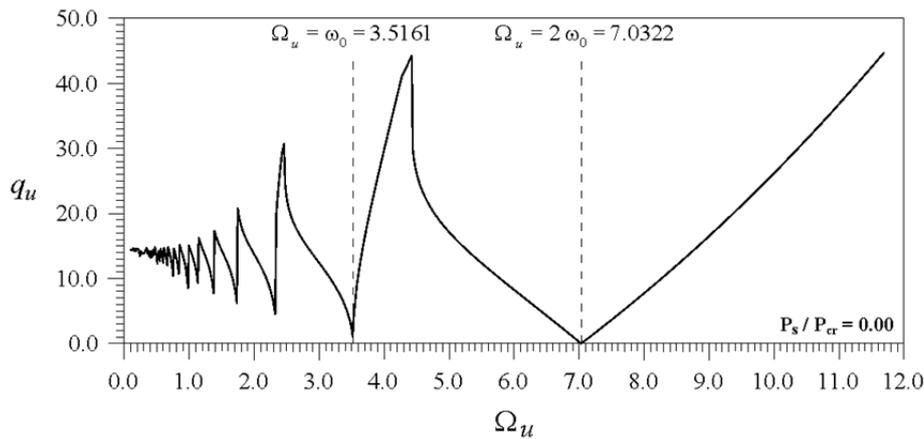


Figura 4.28 – Fronteira de instabilidade paramétrica no espaço de controle. Carga axial: $q_u \cos(\Omega_u t)$.

As respostas no tempo e duas projeções do plano de fase, associadas com solução não trivial, são apresentadas na Figura 4.31 para $q_u = 0,70$, junto com a configuração deformada da barra. Esta solução exhibe as mesmas componentes v e w , tal como se verifica na Figura 4.31.a e Figura 4.31.b. Na Figura 4.31.b confirma-se o período dois da solução (atratores NT1 e NT2). Como o ângulo de torção para estas soluções é nulo (Figura 4.30.b), o movimento da barra ocorre a 45° (Figura 4.31.d) com v e w exibindo a mesma variação temporal.

Incrementando a magnitude da excitação além o ponto de bifurcação localizada sobre a fronteira de instabilidade paramétrica, verifica-se na Figura 4.30.a um contínuo crescimento da amplitude dos deslocamentos. Para $q_u \approx 1,25$, o deslocamento máximo é próximo da unidade.

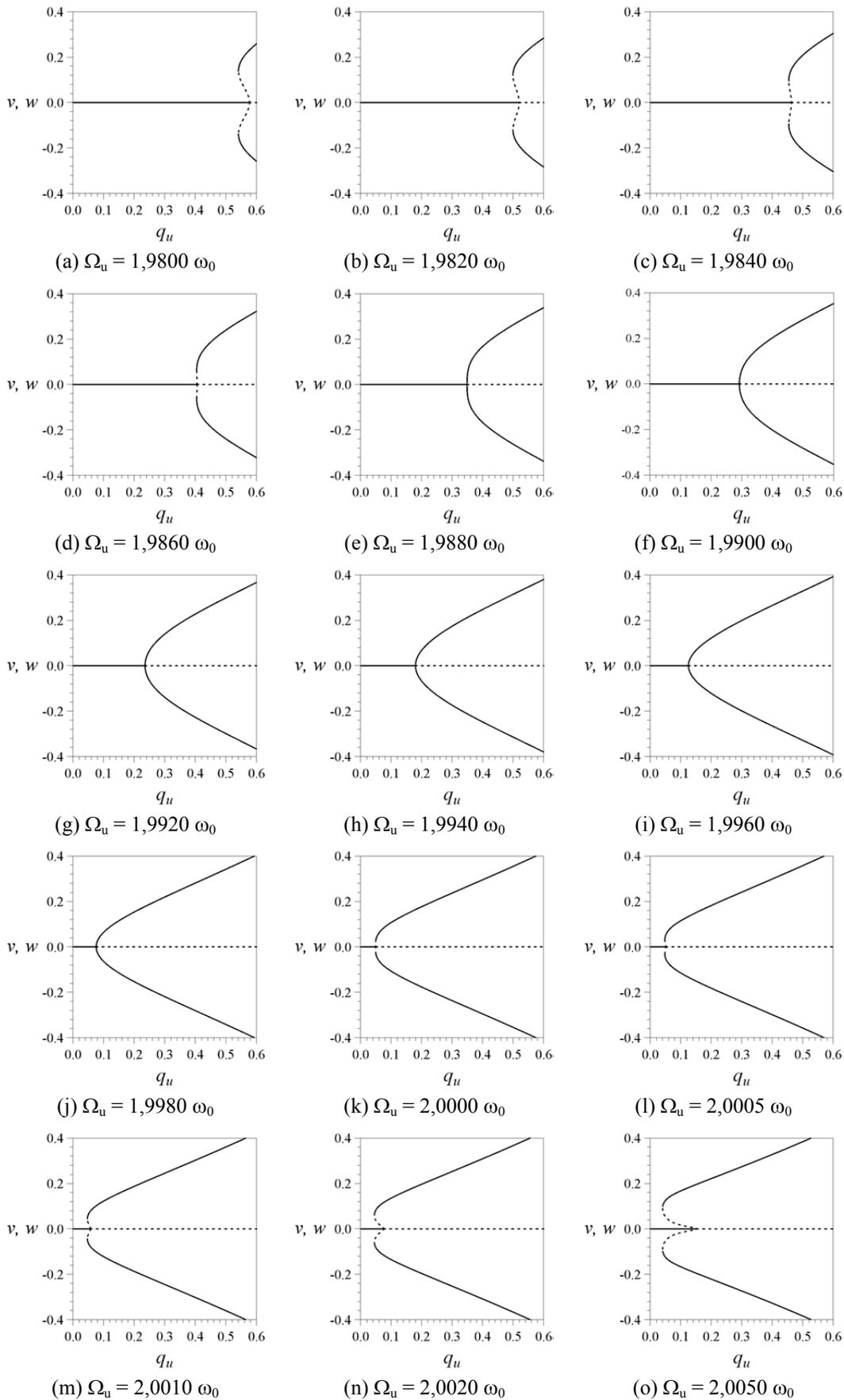
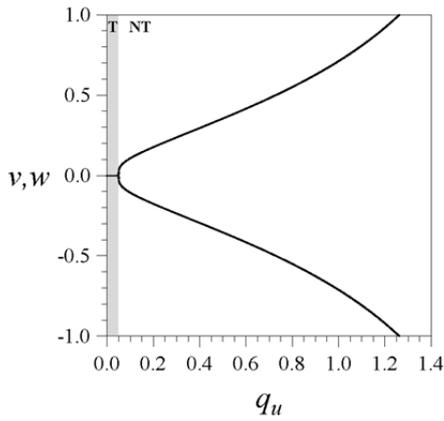
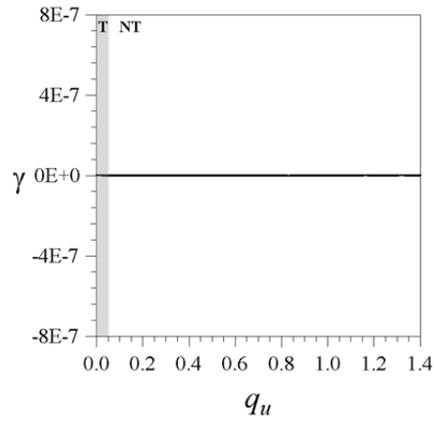


Figura 4.29 – Diagrama de bifurcações para barra sujeita a uma carga axial, na vizinhança da frequência principal ($\Omega_u = 2 \omega_0$).

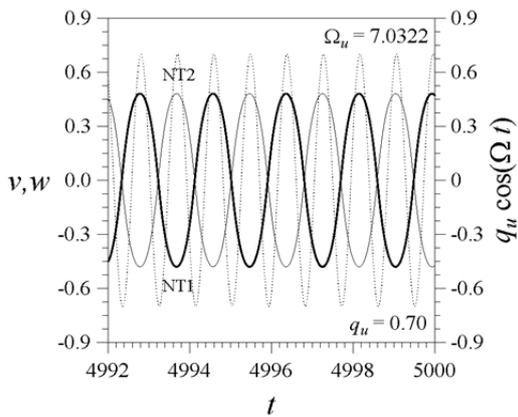


(a) Diagrama de bifurcações em v análogo w .

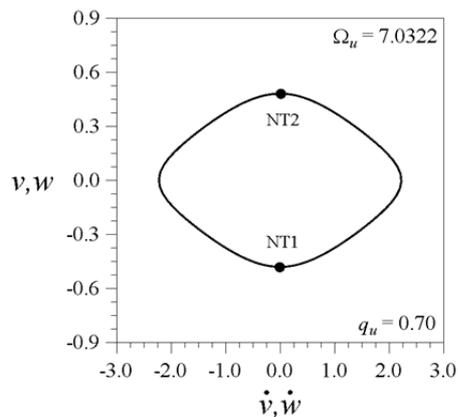


(b) Diagrama de bifurcações em γ .

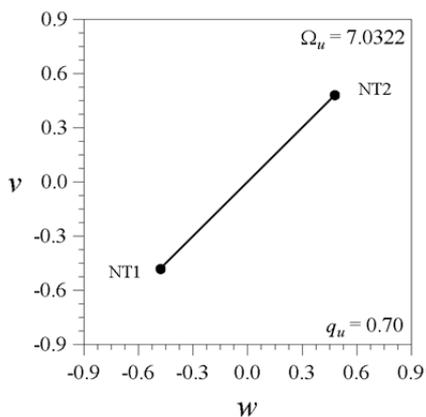
Figura 4.30 – Diagrama de bifurcações para barra sujeita a uma carga axial, considerando $\Omega_u = 2 \omega_0$.



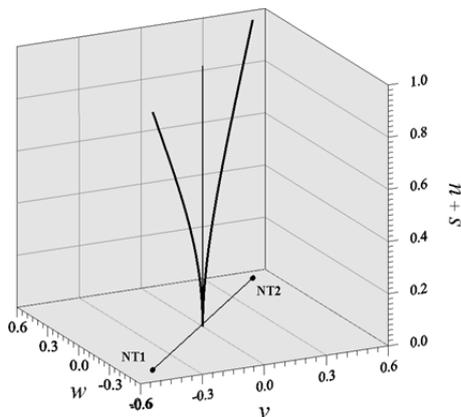
(a) Resposta no tempo v vs. t
(análogo w vs. t)



(b) Projecção do espaço de fase no plano v vs. \dot{v}
(análogo w vs. \dot{w}) e seção de Poincaré



(c) Projecção do espaço de fase no plano v vs. w
e seção de Poincaré



(d) Configuração deformada da barra

Figura 4.31 – Soluções estáveis coexistentes para $q_u = 0,70$ e $\Omega = 2 \omega_0$.

Na Figura 4.32 mostra-se o diagrama de bifurcação para $\Omega_u = \omega_0$, a qual corresponde à menor carga crítica na região fundamental de instabilidade paramétrica (Figura 4.28). Os diagramas na Figura 4.32.a-c foram obtidos usando-se o método da força bruta e os da Figura 4.32.d-f, o método da continuação. Neles observa-se que a solução trivial (T) torna-se instável para $q_u \approx 1.378$, ponto onde a barra experimenta uma bifurcação pitchfork subcrítica, levando-a à duas soluções não triviais de período um, identificadas como NTA e NTB (Figura 4.33.c). Assim, entre $q_u \approx 1.113$ e $q_u \approx 1.378$, três soluções periódicas coexistentes são observadas (Figura 4.33.a e Figura 4.33.b) e, portanto, a resposta da estrutura dependerá das condições iniciais. Diferente do observado na região principal de instabilidade paramétrica, os deslocamentos v e w não são análogos na região fundamental e, por isso, o movimento da barra não se dá a exatos 45° (Figura 4.33.d). A diferença entre eles, que aumenta com o incremento da carga, deve-se à participação do ângulo de torção (Figura 4.32.c e Figura 4.32.f). Portanto, apesar da pequena amplitude, o ângulo de torção influencia no movimento acoplado da estrutura. Isto se deve à quebra de simetria ocasionada pela bifurcação *pitchfork*.

4.4.3.

Influência da carga axial estática na fronteira de instabilidade paramétrica

Para avaliar o efeito da parcela estática da carga axial (P_s) na instabilidade paramétrica do sistema, apresenta-se na Figura 4.34 seis diferentes diagramas de bifurcações, cada qual associado com uma das curvas de ressonância da Figura 4.27.b. Estes diagramas foram obtidos com o método da continuação incrementando a carga axial (q_u) na região principal de instabilidade paramétrica ($\Omega_u = 2 \omega_0$), onde, para cada caso, ω_0 é a menor frequência natural de vibração da barra carregada. Comparando os diagramas de bifurcações na Figura 4.34 observa-se que, a solução trivial perde a estabilidade, em todos os casos apresentados, por meio de uma bifurcação do tipo subcrítica.

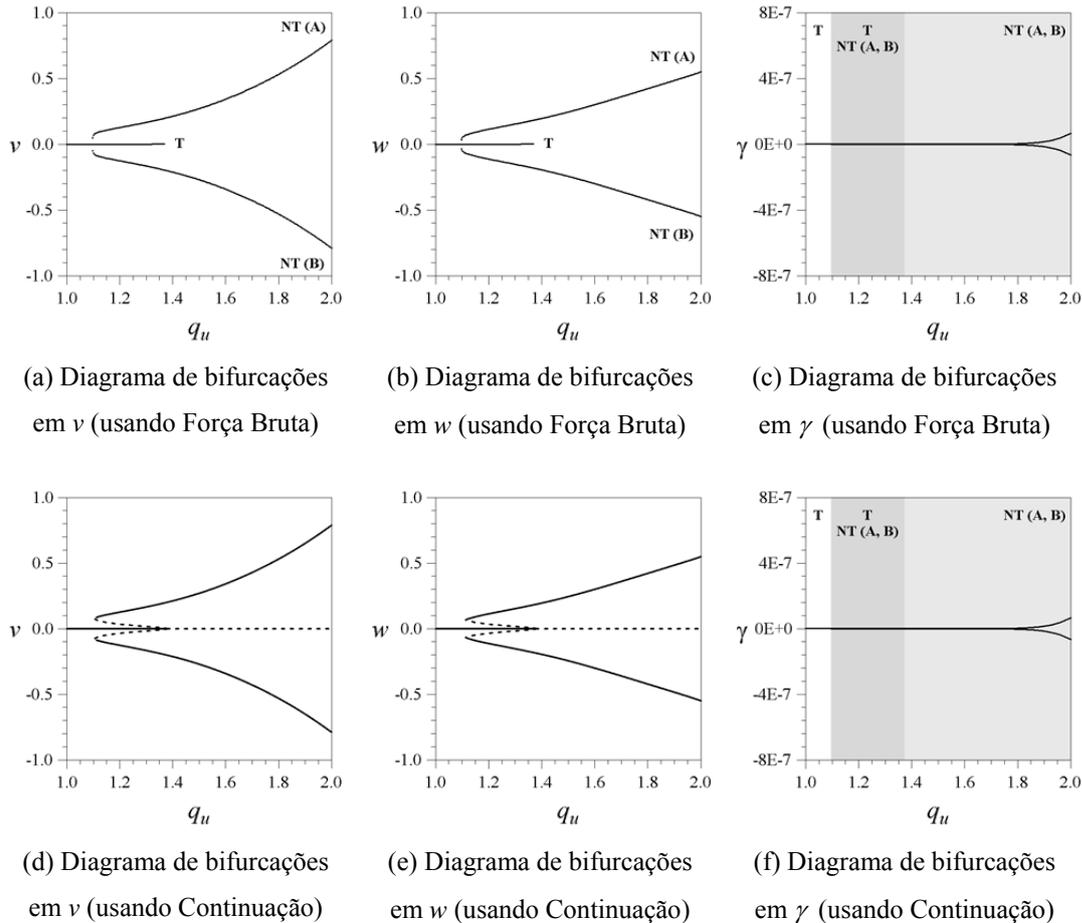


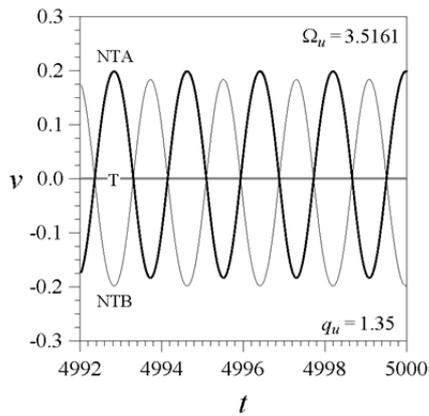
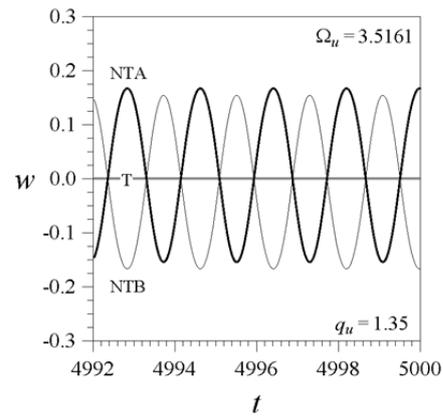
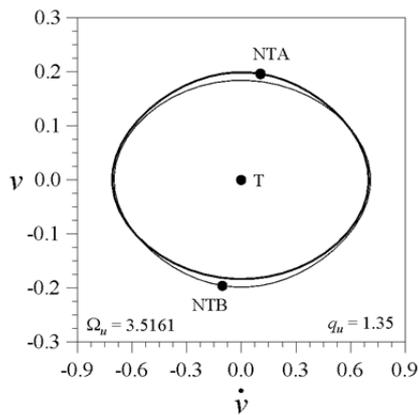
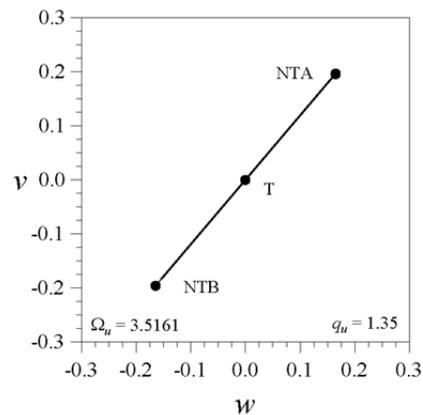
Figura 4.32 – Diagrama de bifurcações e mapa de Poincaré para barra sujeita a uma carga axial, considerando $\Omega_u = \omega_0$.

4.4.4.

Influência da carga axial estática na resposta não linear da barra sob excitação lateral

A seguir, investiga-se a influência da parcela estática da carga axial no comportamento dinâmico não linear da barra sob excitação harmônica lateral dada por $q_v \cos(\Omega_v t)$, na região fundamental de ressonância ($\Omega_v = \omega_0$).

Na Figura 4.35 mostram-se, no espaço $v - w - \Omega_v$, algumas projeções do diagrama de bifurcação, considerando $q_v = 0,025$ e o aumento da carga axial estática P_s . Estes diagramas foram obtidos usando o *software* de continuação AUTO (Doedel *et al.*, 1998), tomando como parâmetro de controle a frequência de vibração Ω_v da excitação lateral.

(a) Resposta no tempo em v vs. t (b) Resposta no tempo em w vs. t (c) Projeção do espaço de fase no plano v vs. \dot{v} e seção de Poincaré(d) Projeção do espaço de fase no plano v vs. w e seção de PoincaréFigura 4.33 – Soluções estáveis coexistentes para $q_u = 1,35$ e $\Omega_u = \omega_0$.

Com o aumento da magnitude da carga estática, a frequência natural de vibração da estrutura diminui (Figura 4.27). Consequentemente, a região de ressonância move-se para esquerda, aproximando-se de zero, e a maioria dos braços de soluções observados na Figura 4.35.a tornam-se instáveis para $P_s / P_{cr} = 0,15$ (Figura 4.35.b). Para este nível de sollicitação, uma região sem qualquer solução periódica estável aparece no diagrama de bifurcações. Usando o método da força bruta, verifica-se na Figura 4.36, uma nuvem de pontos nesta região.

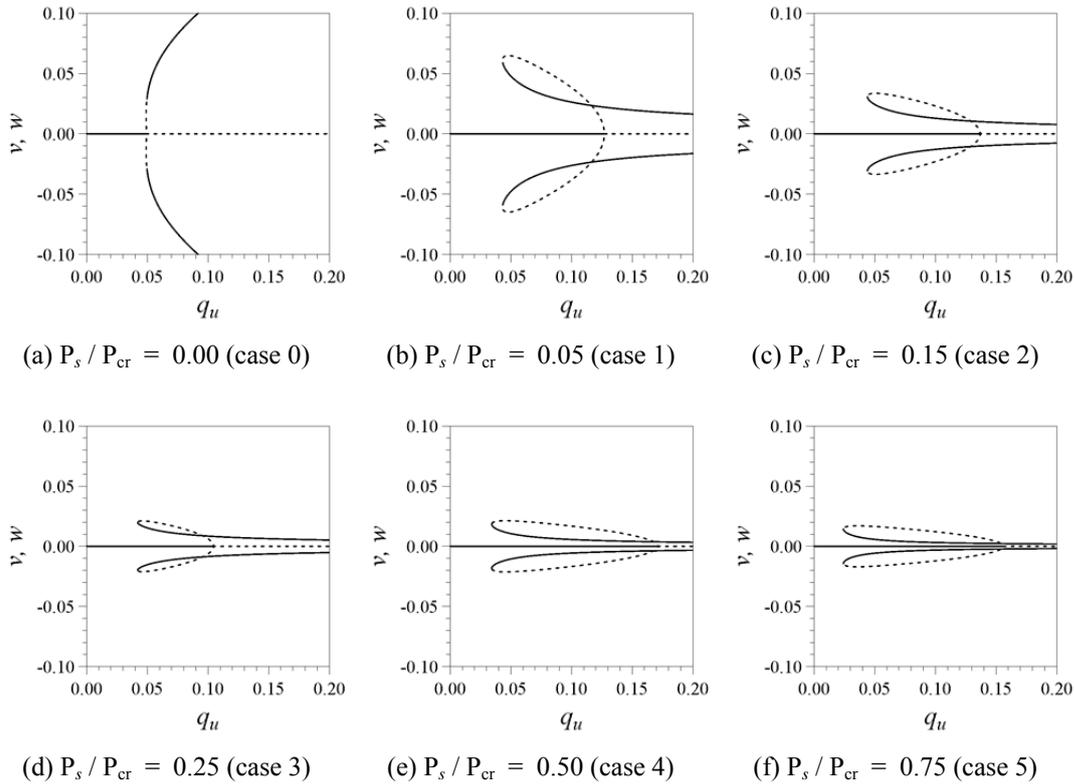
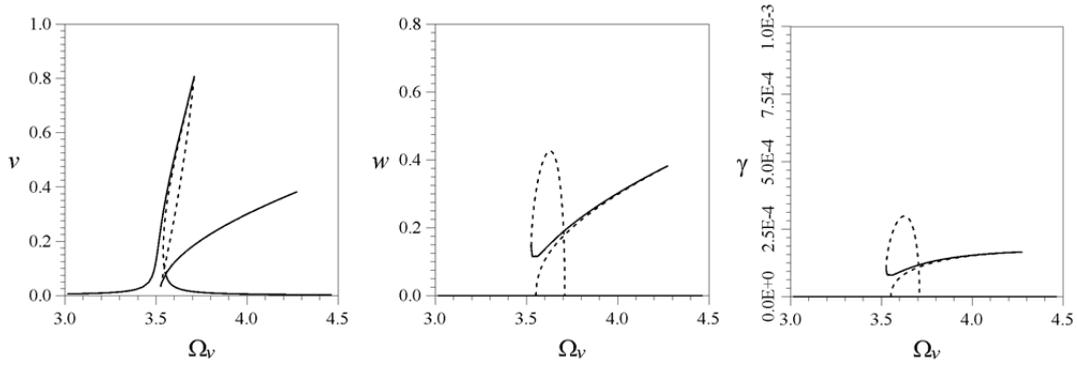


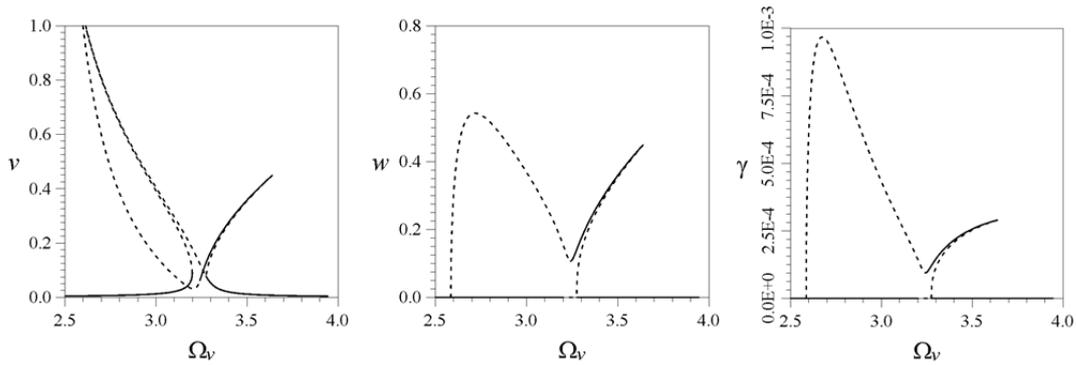
Figura 4.34 – Diagrama de bifurcações para viga sujeita ao aumento da carga axial estática, considerando $\Omega = 2 \omega_0$.

Na Figura 4.37 apresentam-se, junto à resposta no tempo, seções de Poincaré e a evolução dos expoentes de Lyapunov (λ_i , onde $i = 1 \dots 6$) para $\Omega_v = 3,20$. A Figura 4.37.c mostra que ao menos um dos expoentes é positivo ($\lambda_i > 0$), caracterizando o movimento como caótico. Em adição, na Figura 4.37.d apresenta-se o conteúdo de frequência contido no sinal temporal da Figura 4.37.a.

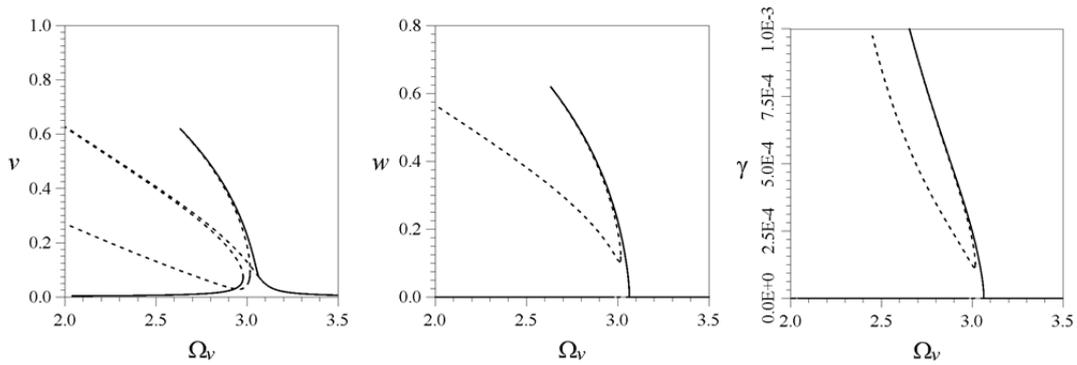
Continuando a aumentar a magnitude da carga estática, verifica-se na Figura 4.35.c o surgimento de mais braços de soluções instáveis. A influência da carga axial na curva de ressonância também é observada na Figura 4.35, com o comportamento da estrutura mudando de *hardening* (com predominância da não linearidade geométrica) para *softening* (com significativa perda de rigidez) e com a crescente (ainda que discreta) participação do ângulo de torção no movimento acoplado de flexão-flexão-torção da barra.



(a) $P_s / P_{cr} = 0,00$ (caso 0)



(b) $P_s / P_{cr} = 0,15$ (caso 2)



(c) $P_s / P_{cr} = 0,25$ (caso 3)

Figura 4.35 – Projeções bidimensionais dos diagrama de bifurcações obtidos com o método da continuação e considerando a frequência de vibração da carga lateral como parâmetro de controle.

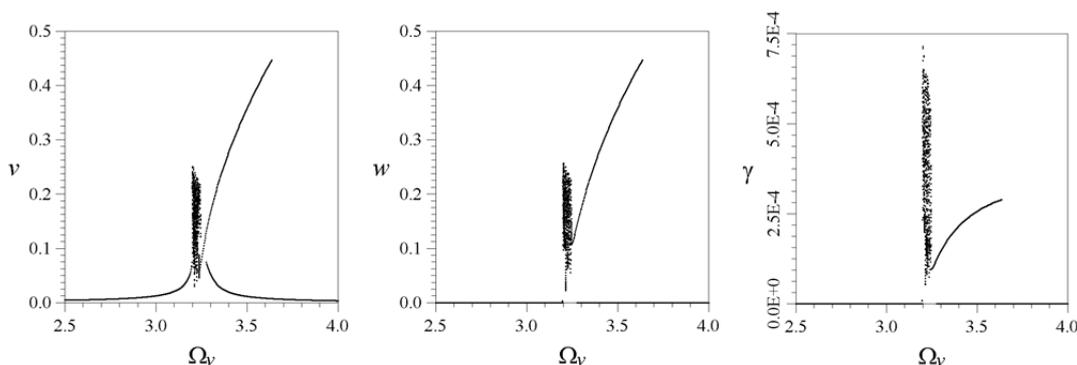


Figura 4.36 – Projeções bidimensionais dos diagrama de bifurcações obtidos com o método da força bruta para $P_s / P_{cr} = 0,15$ (caso 2) e considerando a Ω_v como parâmetro de controle.

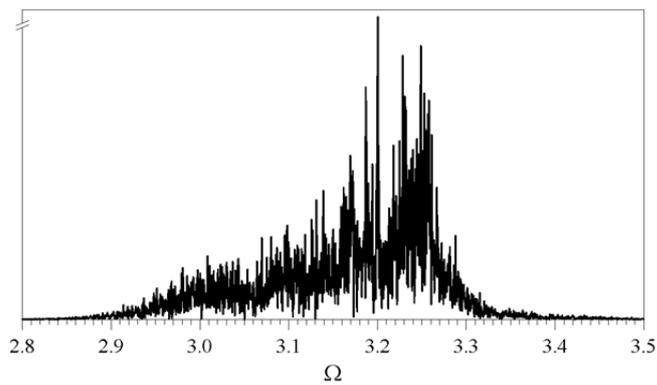
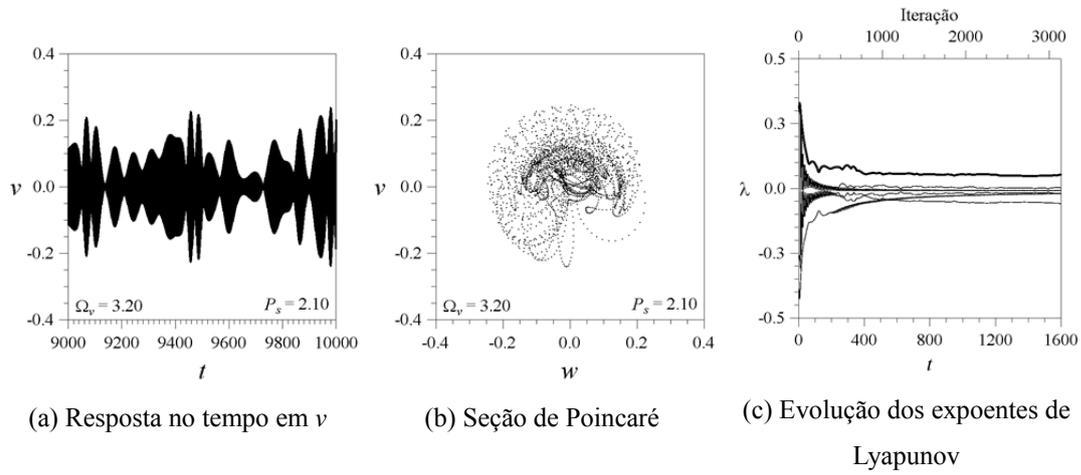


Figura 4.37 – Resposta caótica para elevadas magnitude da solitação. $P_s / P_{cr} = 0,15$ (caso 2) e $\Omega_v = 3,20$.