

5.

Análise do movimento acoplado de barras com imperfeições geométricas iniciais

“Perfeição significa o constante empenho por completar a imagem que o ser animou no mesmo instante em que foi criado. Perfeição significa a eliminação de todo o imperfeito, de onde fica fácil compreender que as imperfeições são produto da ignorância e da falta absoluta de conhecimentos superiores.”

Carlos Bernardo González Pecotche.

5.1.

Aspectos gerais

Um dos principais fatores de construção que influenciam o comportamento estático e dinâmico de estruturas esbeltas são as imperfeições geométricas iniciais. No caso das estruturas unidimensionais, tais como as barra esbeltas, estas imperfeições ocorrem na forma de deslocamentos e rotações impostas à estrutura em consequência dos processos construtivos ou defeitos de fabricação.

As imperfeições geométricas iniciais, portanto, afastam a estrutura da sua configuração perfeita, isto é, daquela concebida na fase de projeto. Dependendo da magnitude e da forma da imperfeição, a estrutura pode comportar-se de forma imprevista ou indesejável e, nos casos mais extremos, entrar em colapso.

Exemplo de pesquisa visando o melhor entendimento do efeito relativo das imperfeições geométricas iniciais no comportamento dinâmico não planar das barras esbeltas pode ser encontrado em Aghababaei, Nahvi e Ziaei-Rad (2009), sendo um dos poucos encontrados, apesar da assinalada importância do tema, justificando seu estudo neste trabalho.

5.2.

Vibração livre não linear

Para investigar a influência de possíveis imperfeições geométricas iniciais no comportamento não linear dinâmico de estruturas esbeltas e altamente flexíveis, adota-se inicialmente uma barra uniforme, engastada e livre, de material linear elástico e isótropo, com comprimento L e seção transversal quadrada de altura $a = 1,0$ e largura b , sendo $b = L / 25$.

Da geometria da estrutura, sabe-se que $\beta_y = 1,00$, $\beta_\gamma = 0,643810$, $J_\eta = J_\zeta = 0,000133$, $J_\xi = 0,000266$, $C_v = C_w = 1,00$ e $C_\gamma = 1,414214$. Substituindo estas propriedades nas Equações (2.128) à (2.130) e assumindo nestas que $P_s = q_u \cos(\Omega_u t) = q_w \cos(\Omega_w t) = mg = 0$, chega-se ao seguinte sistema de equações,

$$\begin{aligned} & (1.0001 + 8.1718v_0^2 + 3.5727w_0^2)\ddot{v} + 1.0002c_v\dot{v} + \\ & (12.3653 - 50.5787v_0^2)v - 4.2487\gamma w + 40.4629(vw^2 + v^3 + v_0w^2) + \\ & 4.5991[(\dot{v}^2 + v\ddot{v} + \dot{w}^2 + w\ddot{w})(v + v_0) + v_0w_0\ddot{w} + w_0v\ddot{w} + v_0v\ddot{v}] - \\ & 0.0017(v^2\ddot{v} + vw\ddot{w} + w\dot{w}\dot{v} + v\dot{v}^2 + w_0\dot{v}\dot{w} - v_0\dot{w}^2) + 0.7919w_0\gamma - \\ & 30.3472w_0v w + 91.0416v_0v^2 + 50.5787v_0w_0w + 1.6073v_0\gamma^2 - \\ & 0.0007(\dot{w}\dot{\gamma} - c_\gamma w\dot{\gamma}) - [0.7831 + 3.5727(w_0^2 + v_0^2)]q_v \cos(\Omega_v t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} & (1.0001 + 8.1718w_0^2 + 3.5727v_0^2)\ddot{w} + 1.0002c_w\dot{w} + \\ & (12.3653 - 50.5787w_0^2)w + 4.2487\gamma v + 40.4629(wv^2 + w^3 + w_0v^2) + \\ & 4.5991[(\dot{w}^2 + w\ddot{w} + \dot{v}^2 + v\ddot{v})(w + w_0) + w_0v_0\ddot{v} + v_0w\ddot{v} + w_0w\ddot{w}] - \\ & 0.0017(w^2\ddot{w} + wv\ddot{v} + v\dot{v}\dot{w} + w\dot{w}^2 + v_0\dot{w}\dot{v} - w_0\dot{v}^2) - 0.7919v_0\gamma - \\ & 30.3472v_0w v + 91.0416w_0w^2 + 50.5787w_0v_0v + 1.6073w_0\gamma^2 - \\ & 0.0007\dot{v}\dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & [1.0000 + 3.2517(v_0^2 + w_0^2)]\ddot{\gamma} + 1.0000c_\gamma\dot{\gamma} + \\ & [5957.0112 + 6116.5163(v_0^2 + w_0^2)]\gamma + 2.6746(\ddot{v}w - \ddot{w}v + w_0\ddot{v} - v_0\ddot{w}) + \\ & 12054.5346(v_0\gamma v + w_0\gamma w) - 16227.3797(w_0v + v_0w), \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde, v_0 , w_0 e γ_0 são, respectivamente, as imperfeições geométricas nas direções v , w e γ . Por sua vez, $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$ são os coeficientes de amortecimento viscoso e $q_v \cos(\Omega_v t)$ refere-se à carga harmônica lateral aplicada na direção de v ,

sendo $q_v = 0,025$ a amplitude da excitação, Ω_v a frequência da excitação e t o tempo. Para efeito de análise, nos exemplos ao longo deste capítulo, a possível rotação inicial da barra não é considerada, isto é, nas Equações (5.1) à (5.3) faz-se $\gamma_0 = 0,00$.

Linearizando o sistema dado nas Equações (5.1) à (5.3), obtêm-se as expressões para as três frequências naturais de vibração da barra, nos seus respectivos modos, em função das imperfeições geométricas v_0 e w_0 . Elas são:

$$\omega_v^2 = \frac{12.3653 - 50.5787 v_0^2}{1.0001 + 8.1718 v_0^2 + 3.5727 w_0^2}, \quad (5.4)$$

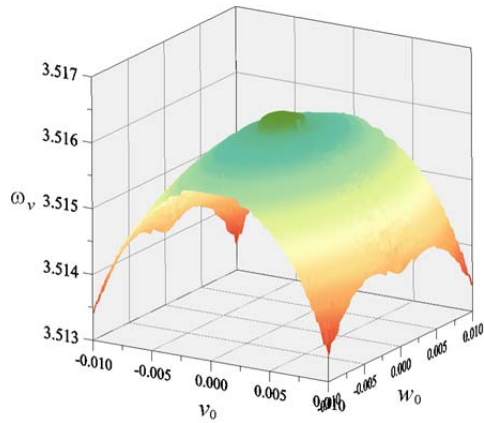
$$\omega_w^2 = \frac{12.3653 - 50.5787 w_0^2}{1.0001 + 8.1718 w_0^2 + 3.5727 v_0^2}, \quad (5.5)$$

$$\omega_\gamma^2 = \frac{5057.0112 + 6116.5163(v_0^2 + w_0^2)}{1.0000 + 3.2517(v_0^2 + w_0^2)}. \quad (5.6)$$

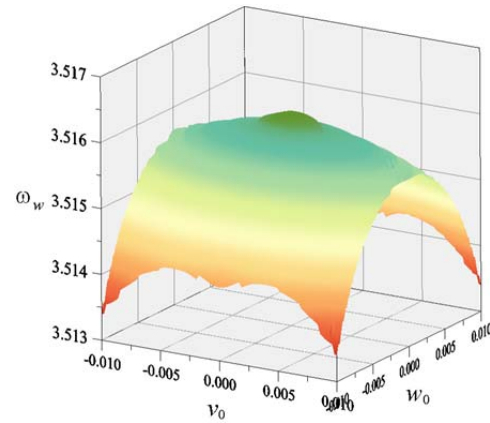
Na Figura 5.1 apresenta-se a variação da frequência natural de vibração da barra em função da magnitude das imperfeições geométricas v_0 e w_0 . A Figura 5.1.a, obtida a partir da Equação (5.4), refere-se à frequência de vibração do modo de flexão na direção do deslocamento v e a Figura 5.1.b, obtida a partir da Equação (5.5), refere-se à frequência de vibração em w .

Comparando estas duas superfícies verifica-se que uma é o reflexo da outra, isto é, um ponto com coordenadas (v_0, w_0, ω_v) na Figura 5.1.a corresponde ao ponto (w_0, v_0, ω_w) na Figura 5.1.b. Além disso, verifica-se nestas superfícies que as imperfeições geométricas levam um decréscimo das frequências naturais e ao afastamento da região de ressonância interna 1:1, que ocorre quando $v_0 = w_0$, ou seja, $\omega_v = \omega_w$.

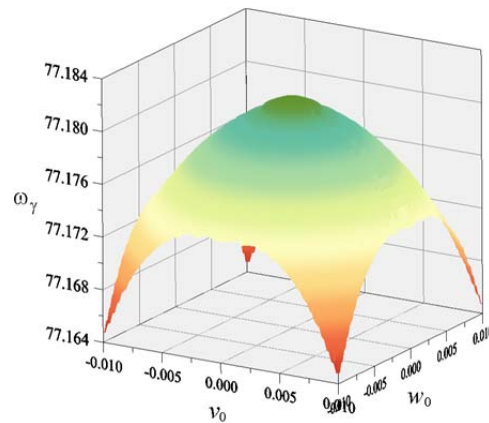
Na Figura 5.1.c, apresenta-se o decaimento da frequência de vibração associada ao modo de torção da barra com o incremento das imperfeições laterais v_0 e w_0 . Nela verifica-se que o sistema dinâmico possui elevada rigidez à torção, o que, para sistemas sem imperfeições geométricas iniciais, resulta em ângulos de torção de pequena amplitude.



(a) Superfície v_0 vs. w_0 vs. ω_v , obtida da Equação (5.4)



(b) Superfície v_0 vs. w_0 vs. ω_w , obtida da Equação (5.5)



(c) Superfície v_0 vs. w_0 vs. ω_γ , obtida da Equação (5.6)

Figura 5.1 – Efeito das imperfeições nas frequências naturais de vibração da barra.

5.3.

Vibração forçada amortecida – flexão simples

Mensurado o efeito das imperfeições geométricas iniciais nas frequências de vibração da barra, estuda-se agora o efeito destas no movimento forçado e amortecido da barra. Como anteriormente, considera-se uma excitação harmônica $q_v \cos(\Omega_v t)$ aplicada na direção do deslocamento v .

A título de comparação, apresenta-se na Figura 5.2 o diagrama de bifurcações da barra no espaço Ω_v vs. v vs. w (Figura 5.2.a) e γ vs. v vs. w (Figura 5.2.b), obtido considerando a coluna perfeita ($v_0 = w_0 = 0,00$).

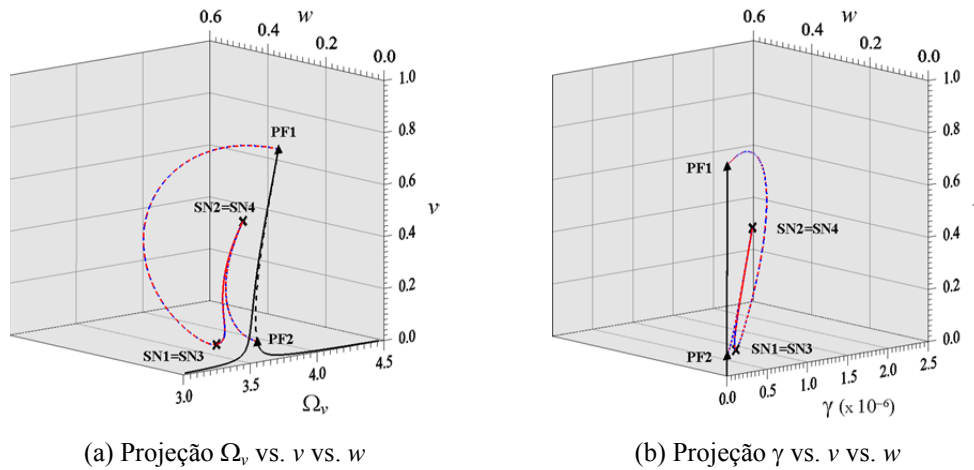
(a) Projeção Ω_v vs. v vs. w (b) Projeção γ vs. v vs. w

Figura 5.2 – Diagrama de bifurcações para barra com amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$ e solicitação lateral $Q_v = 0,025 \cos(\Omega_v t)$. Estrutura perfeita.

Este diagrama assemelha-se ao apresentado na Figura 3.4, onde se estudou o movimento acoplado de flexão-flexão-torção de barras com elevada rigidez à torção em flexão simples. As diferenças entre eles justificam-se pela diferença no amortecimento da barra e na amplitude da solicitação lateral: lá iguais a 5% e 0,2, respectivamente, e aqui iguais a 0,6% e 0,025. Como nos estudos anteriores, o acoplamento flexão-flexão-torção da barra induz o aparecimento de oscilações fora do plano devido às bifurcações pitchfork PF1 e PF2.

Na Figura 5.3 apresentam-se os diagramas de bifurcações para barra com imperfeição geométrica inicial $v_0 = 0,01$ (0,04% L) e na Figura 5.4 para $w_0 = 0,01$. Comparando estes diagramas com o da Figura 5.2, importantes diferenças nas bifurcações podem ser observadas. Na Figura 5.3.a (detalhe na Figura 5.3.c) verifica-se que o ponto PF1 move-se no diagrama de bifurcações para baixo se deslocando ao longo do braço de soluções planares instáveis. Já na Figura 5.4.a (detalhe na Figura 5.4.c) verifica-se que o ponto de bifurcação PF1 move-se para baixo, porém, se deslocando ao longo do braço ressonante planar estável, que passa a ser instável após PF1. Além disso, na Figura 5.4 observa-se uma mudança na sequência de bifurcações ao longo dos braços de soluções não planares (vermelho e azul). Nestes, dois novos pontos sela-nó (NS5=NS6) são observados, com soluções estáveis ocorrendo entre os pontos PF1 e SN5=SN6 e SN1=SN3 e SN2=SN4. Em especial, na Figura 5.3.b e Figura 5.4.b, nota-se que os braços de soluções não planares, coincidentes no caso perfeito (Figura 5.2.b), começam a distinguir-se um do outro no diagrama de bifurcações em virtude da assimetria provocada pela imperfeição geométrica.

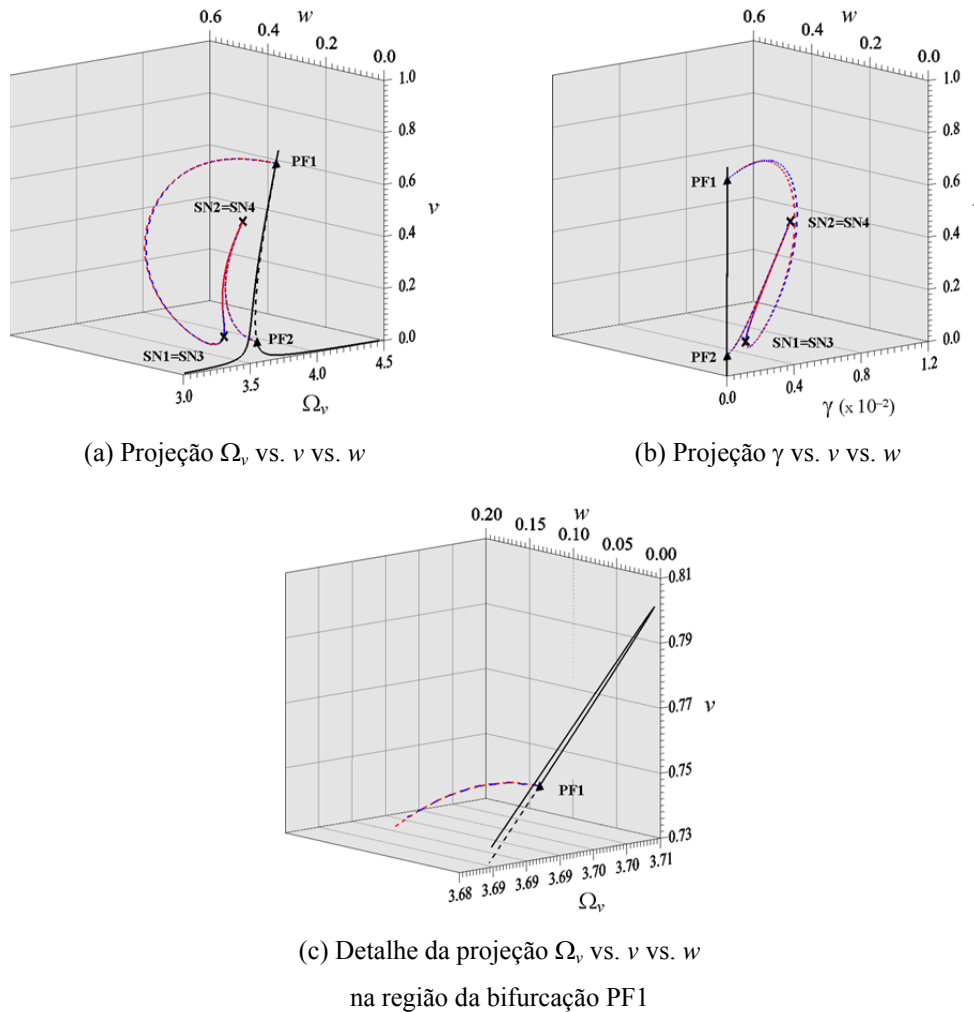


Figura 5.3 – Diagramas de bifurcações para barra com imperfeição geométrica inicial $\nu_0 = 0,01$.

Na Figura 5.5 e Figura 5.6 apresenta-se a resposta no tempo, plano de fase e seção de Poincaré para $\Omega_v = 3,66064$, considerando, respectivamente, $\nu_0 = 0,01$ e $w_0 = 0,01$. As soluções que aparecem nestas referem-se, respectivamente, aos diagramas de bifurcações da Figura 5.3 e Figura 5.4, seguindo a mesma convenção de cores. Estas projeções são observadas no hiperplano $\dot{\nu} = 1,881350$, $\dot{w} = -0,470302$, $\gamma = 0,011297$ e $\dot{\gamma} = 0,051874$.

Na Figura 5.5.a-c verifica-se a presença de quatro soluções estáveis de período 1 (quatro atratores na Figura 5.5.c, cada um associado a uma órbita fechada no plano de fase), sendo duas soluções planares (atrator TS de pequena amplitude e atrator TL de grande amplitude de vibração) e duas soluções não planares (atratores NT1 e NT2). Comparada à Figura 5.5, nota-se na Figura 5.6.a-c duas soluções não planares adicionais, também de período 1 (atratores NT3 e NT4), que surgem no espaço das variáveis de estado devido à imperfeição $w_0 = 0,01$ no sentido transversal à força.

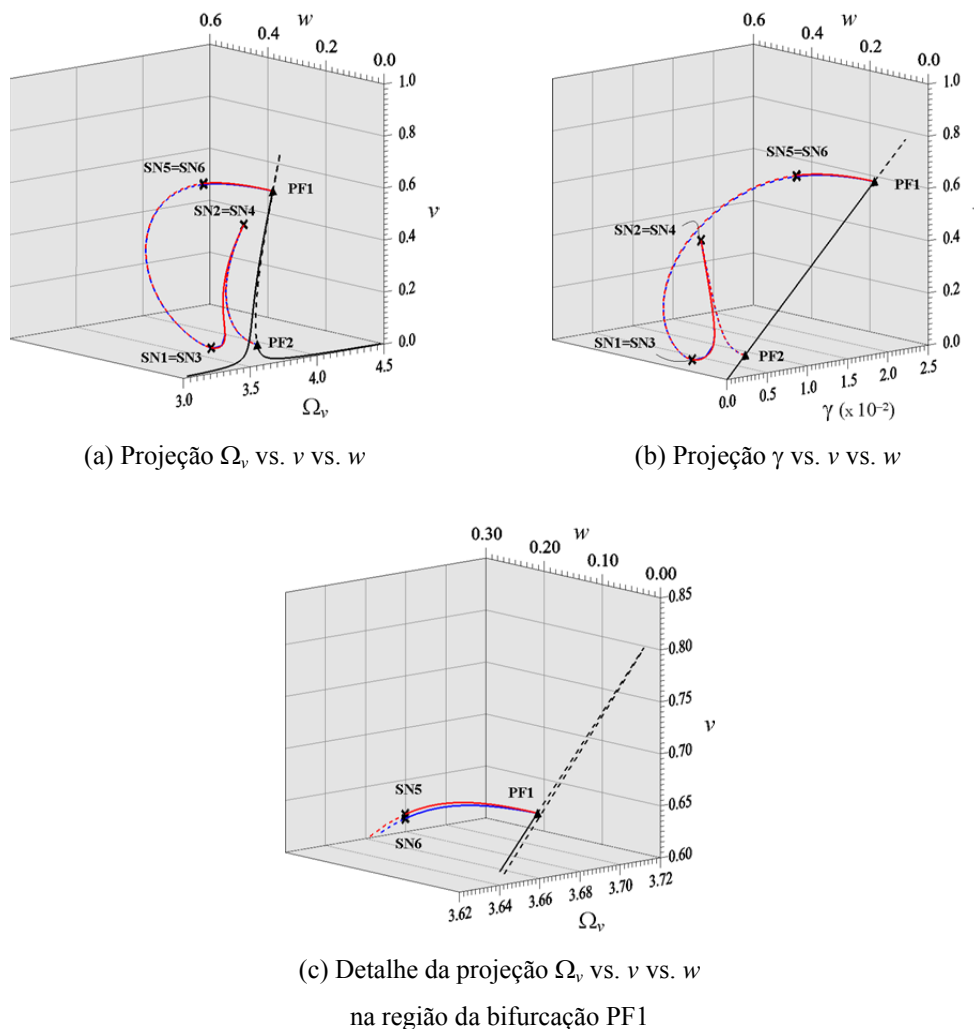
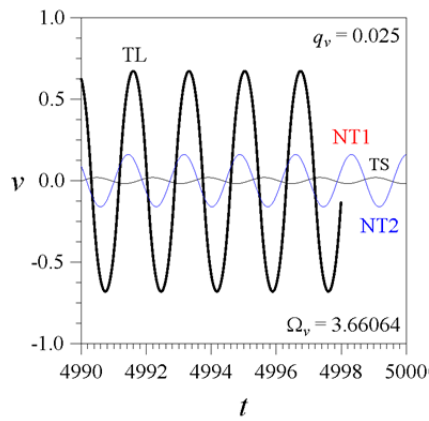
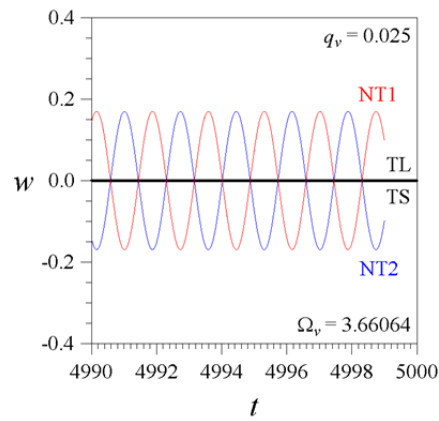
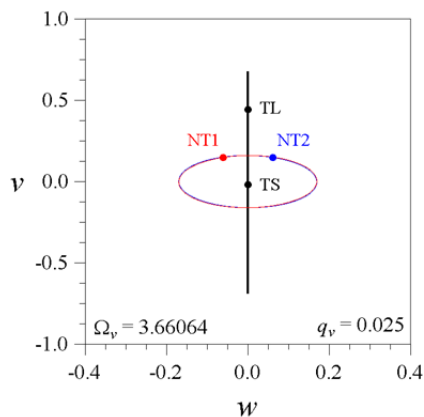
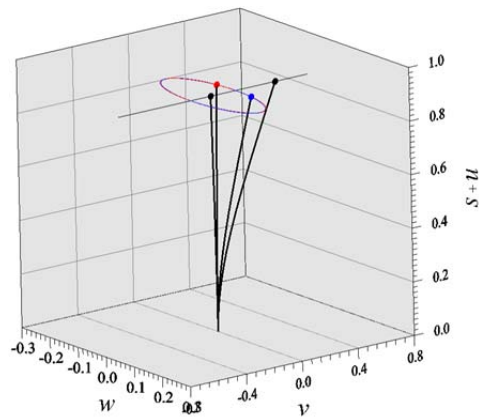


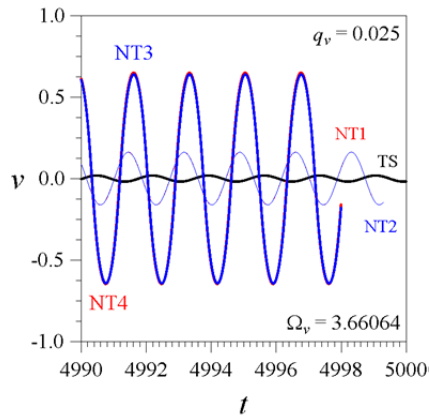
Figura 5.4 – Diagramas de bifurcações para barra com imperfeição geométrica inicial $w_0 = 0,01$.

Na Figura 5.6 verifica-se ainda que a solução com grande amplitude de deslocamentos no plano (na mesma direção da sollicitação, isto é, do deslocamento v) observada na Figura 5.5, não existe em $\Omega_v = 3,66064$, em virtude da mencionada translação do ponto de bifurcação pitchfork PF1 no espaço das variáveis de estado.

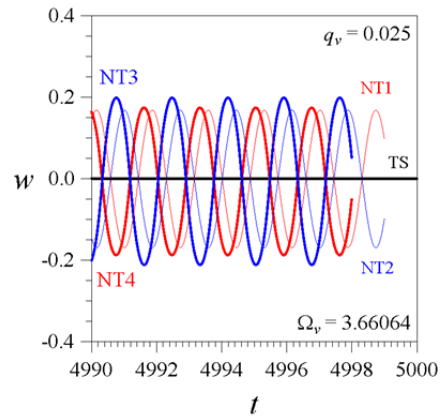
Adicionalmente, na Figura 5.5.d e Figura 5.6.d apresenta-se, respectivamente, a configuração deformada da barra para as quatro possíveis configurações de equilíbrio deformada identificadas em $\Omega_v = 3,66064$, quando $v_0 = 0,01$, e para as cinco, quando $w_0 = 0,01$. Dentre as possíveis configurações de equilíbrio, a que a barra assume depende das condições iniciais do sistema.

(a) Resposta no tempo v vs. t (b) Resposta no tempo w vs. t (c) Projção do espaço de fase no plano v vs. w e seção de Poincaré(d) Projção do espaço de fase no espaço $(s + u)$ vs. v vs. w , seção de Poincaré e configuração deformada da barraFigura 5.5 – Soluções estáveis coexistentes para $q_u = 0,025$, $\Omega_v = 3,66064$ e $v_0 = 0,01$.

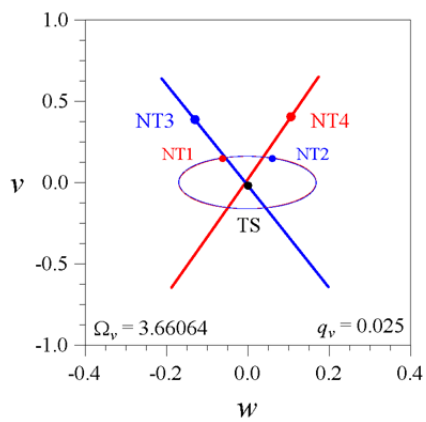
Seções v vs. w da bacia de atração são apresentadas na Figura 5.7 para $v_0 = 0,01$, e na Figura 5.8 para $w_0 = 0,01$ (com detalhe na Figura 5.8.b), ambas definidas por $\dot{v} = 1,881350$, $\dot{w} = -0,470302$, $\gamma = 0,011297$ e $\dot{\gamma} = 0,051874$. Nestas seções observam-se seis diferentes regiões, cada uma associada com um comportamento específico, a saber: a) região preta – solução com vibrações no plano da excitação e com grande amplitude de vibração (atrator TL na Figura 5.5); b) região cinza – solução com vibrações no plano da excitação e com menor amplitude de vibração (atrator TS na Figura 5.5 e Figura 5.6); c) região vermelha e azul – soluções não planares devidas à interação modal e com moderada amplitude de vibração (atratores NT1 e NT2 na Figura 5.5 e Figura 5.6, respectivamente); d) região azul escuro e vermelho escuro – soluções não planares com grande amplitude de vibração (respectivamente atratores NT3 e NT4 na Figura 5.6). Os pontos amarelos são projeções dos pontos fixos nestas seções.



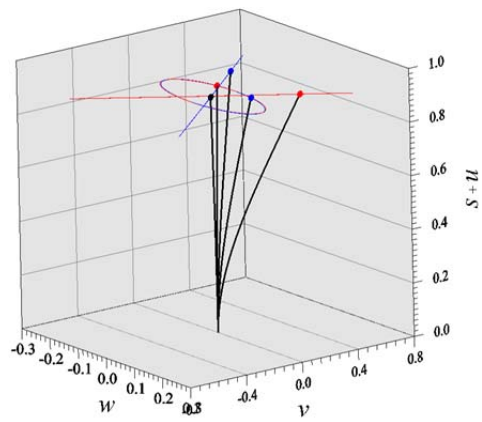
(a) Resposta no tempo v vs. t



(b) Resposta no tempo w vs. t



(c) Projeção do espaço de fase no plano v vs. w e seção de Poincaré



(d) Projeção do espaço de fase no espaço $(s + u)$ vs. v vs. w , seção de Poincaré e configuração deformada da barra

Figura 5.6 – Soluções estáveis coexistentes para $q_u = 0,025$, $\Omega_v = 3,66064$ e $w_0 = 0,01$.

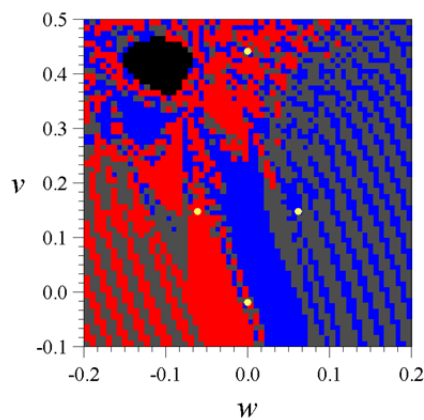


Figura 5.7 – Seção v vs. w da bacia de atração definida por $\dot{v} = 1.881350$, $\dot{w} = -0.470302$, $\gamma = 0.011297$ e $\dot{\gamma} = 0.051874$ para $\Omega_v = 3,66064$ e $v_0 = 0,01$.

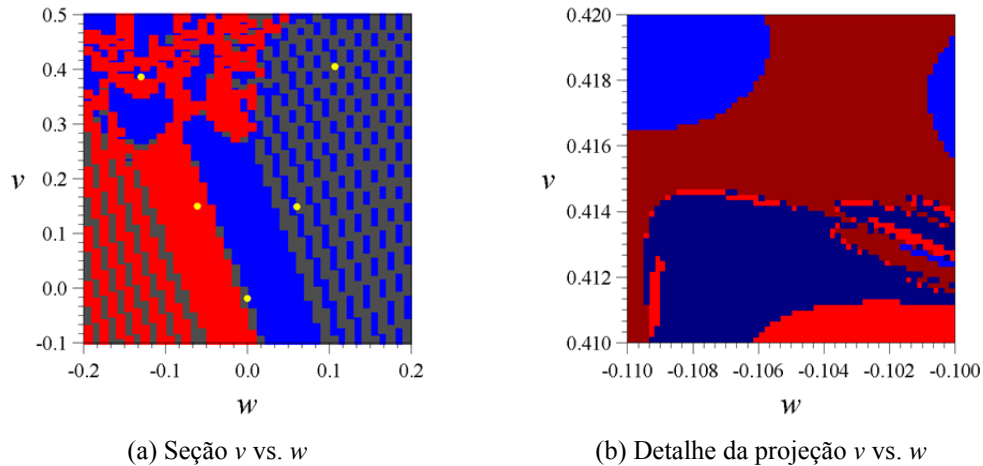


Figura 5.8 – Seção da bacia de atração definida por $\dot{v}=1.881350$, $\dot{w}=-0.470302$, $\gamma=0.011297$ e $\dot{\gamma}=0.051874$ para $\Omega_v=3,66064$ e $w_0=0,01$.

Na Figura 5.7 verifica-se um conjunto bem definido de condições iniciais que levam a vibrações de grande amplitude no plano da excitação (região preta). Uma grande sensibilidade às condições iniciais é observada no restante da projeção, com as sub-bacias de soluções não planares (regiões vermelha e azul) intercaladas pela de soluções planares de pequena amplitude de vibração (região cinza).

Tal como Figura 5.7, verifica-se na Figura 5.8 uma seção fractal da bacia de atração. Na Figura 5.8.a, as sub-bacias associadas com as soluções não planares de grande amplitude não aparecem (regiões vermelho escuro e azul escuro), pois são compostas por um conjunto muito restrito de condições iniciais, os quais podem ser observados em detalhe na Figura 5.8.b. Destas projeções da bacia de atração conclui-se que as soluções não planares de maior amplitude só aparecem quando se perturba o grau de liberdade de deslocamento w da barra, por meio da imperfeição w_0 .

Os resultados obtidos até aqui evidenciam a importância das imperfeições geométricas iniciais, mudando o cenário bifurcativo do sistema e, em consequência, dando origem a novas soluções periódicas, inclusive vibrações de grande amplitude. Observa-se também que a direção da imperfeição em relação à direção do carregamento tem grande influência nos resultados, inclusive no número de soluções estáveis.

Considera-se agora uma imperfeição a 45° descrita por $v_0 = w_0 = 0,001$ (Figura 5.9). Na Figura 5.9.a chama-se a atenção para o ponto de bifurcação

pitchfork PF1 que migra para fora do plano Ω_v vs. v , significando com isso o desaparecimento de soluções planares. Com as imperfeições ocorrendo nas duas direções, os dois braços de soluções não planares (vermelho e azul) deixaram de ser coincidentes (ver Figura 5.9.b). Considerando agora $v_0 = w_0 = 0,01$, verifica-se na Figura 5.10 uma drástica mudança nas bifurcações e resposta da estrutura. Na Figura 5.10 confirma-se que o braço de soluções planares (em preto na Figura 5.9) desaparece, dando lugar a um novo braço de soluções estáveis não planares, com a consequente destruição do ponto de bifurcação pitchfork PF1 e o surgimento, no seu lugar, de um novo ponto de bifurcação sela-nó (SN0).

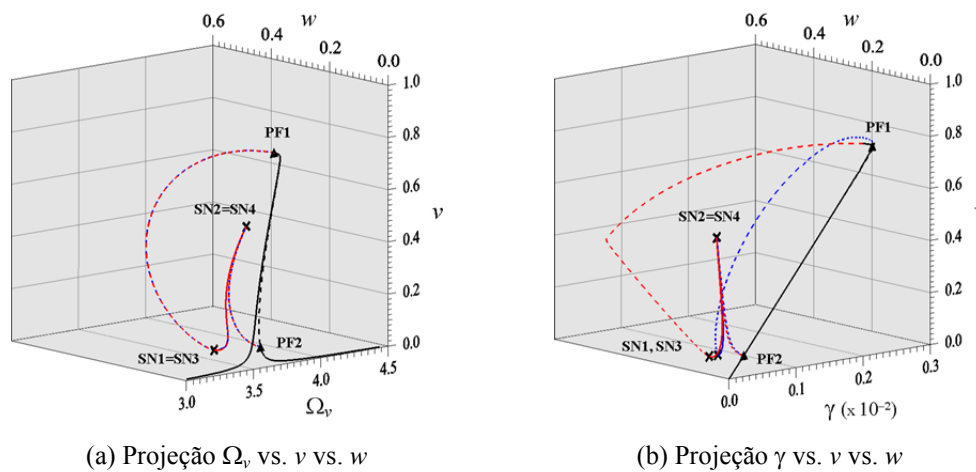


Figura 5.9 – Diagramas de bifurcações para barra com imperfeição geométrica inicial $v_0 = w_0 = 0,001$.

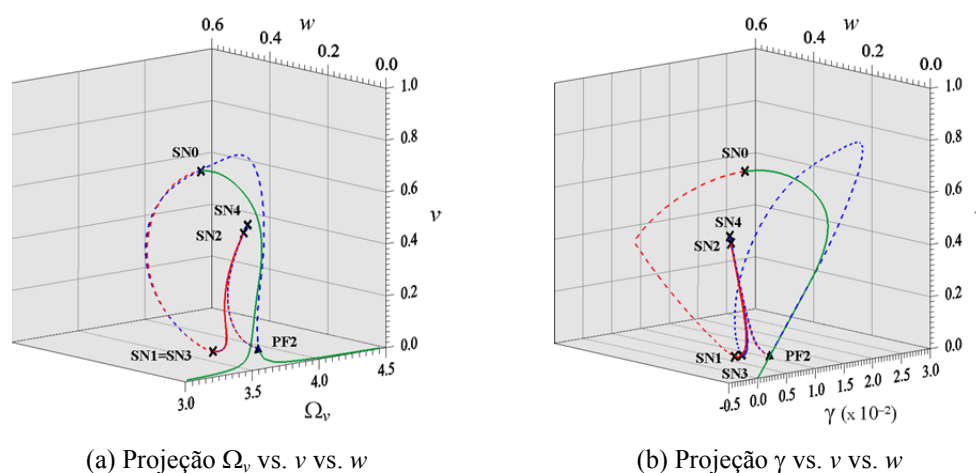


Figura 5.10 – Diagramas de bifurcações para barra com imperfeição geométrica inicial $v_0 = w_0 = 0,01$.

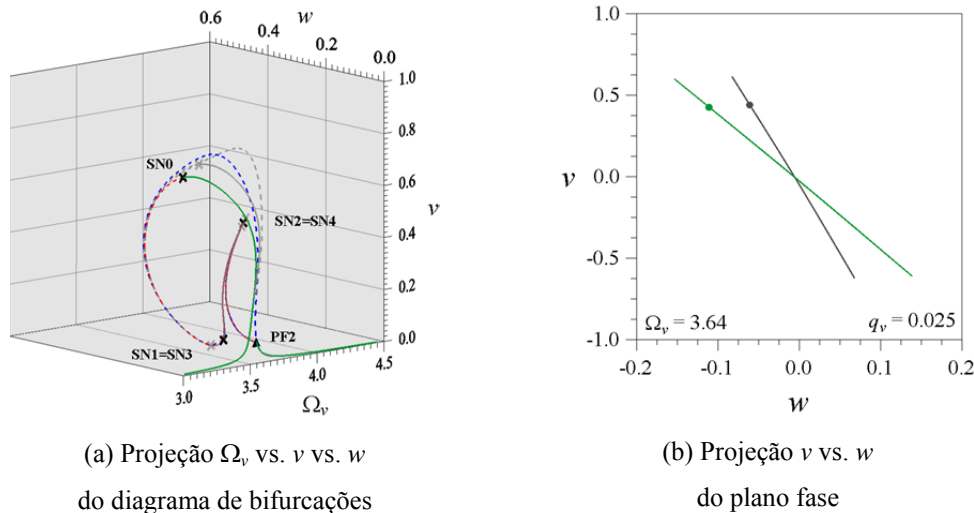
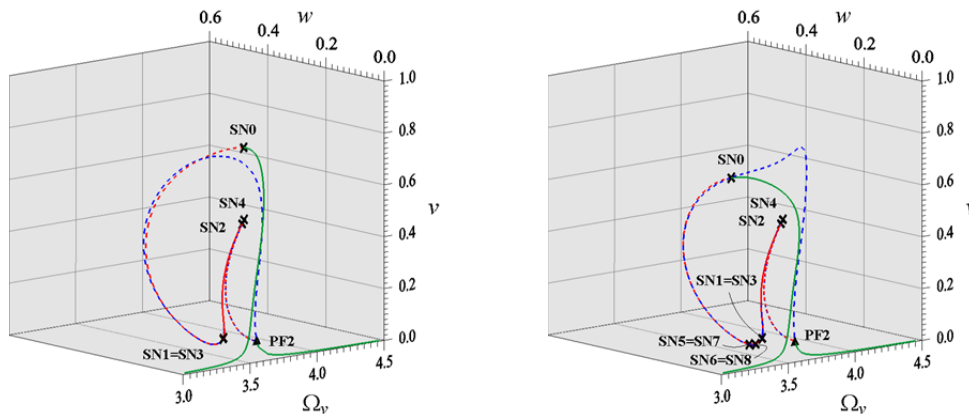


Figura 5.11 – Diagrama de bifurcações e plano fase para barra com imperfeição geométrica inicial $\nu_0 = w_0 = 0,01$, obtido fazendo $\gamma = 0,0$ no sistema de equações.

A consideração do ângulo de torção no sistema de equações, além de ser uma informação para o entendimento do movimento tridimensional da barra, faz-se indispensável quando este alcança grandes amplitudes. Na Figura 5.11, por exemplo, apresenta-se o diagrama de bifurcações para barra com imperfeições $\nu_0 = w_0 = 0,01$, obtido desprezando o ângulo de torção no sistema de Equações (5.1), (5.2) e (5.3), isto é, fazendo $\gamma = 0,0$ (sistema com dois graus de liberdade: ν e w). Para facilitar a comparação, na Figura 5.11 reapresenta-se o diagrama de bifurcação da Figura 5.10.a, porém, na cor cinza. Nela nota-se que os resultados obtidos a partir do sistema com dois graus de liberdade são diferentes dos obtidos pela solução do sistema com três graus de liberdade (ν , w e γ), inclusive nas projeções do plano fase e seção de Poincaré, como se ilustra na Figura 5.11.b para uma solução de grande amplitude. Verifica-se pois que o modelo tradicionalmente usado na literatura considerando dois graus de liberdade não pode ser usado para a análise do sistema imperfeito, mesmo no caso de grande rigidez à torção.

Pelos resultados apresentados até aqui, se pode julgar com maior clareza a grande influência das possíveis imperfeições geométricas iniciais no movimento acoplado da barra, as quais, dependendo da amplitude, podem mudar o cenário bifurcativo do sistema e levar, por conseguinte, ao surgimento ou desaparecimento de pontos limites e braços de soluções. Nos diagramas de bifurcações da Figura 5.12.a e Figura 5.12.b, obtidos fazendo, respectivamente, $\nu_0 = 2 w_0 = 0,01$ e $w_0 = 2 \nu_0 = 0,01$, a assinalada influência das imperfeições geométricas é mais uma vez observada.

Novamente, devido à consideração simultânea das imperfeições v_0 e w_0 , não surgem soluções planares nos diagramas da Figura 5.12. Adicionalmente, na Figura 5.12.b, verifica-se uma nova mudança na sequência de bifurcações, com o aparecimento de quatro novos pontos de bifurcação sela-nó (SN5=SN7 e SN6=SN8) e os consequentes ramos de soluções estáveis entre eles.



(a) Projeção Ω_v vs. v vs. w . Assumindo

$$v_0 = 2 w_0 = 0,01$$

(b) Projeção γ vs. v vs. w . Assumindo

$$w_0 = 2 v_0 = 0,01$$

Figura 5.12 – Diagramas de bifurcações para barra com imperfeição geométrica inicial $v_0 \neq w_0 \neq 0,0$.

5.4.

Vibração forçada amortecida – flexão oblíqua

Dando continuidade ao estudo do movimento acoplado de barras com imperfeições geométricas iniciais, considera-se agora a barra sob flexão oblíqua. Inicialmente, adotam-se as seguintes magnitudes para a excitação lateral: $q_v = q_w = 0,01767766952$, significando com isto, que a sollicitação lateral possui resultante a 45° de inclinação com o plano XY . A magnitude da excitação lateral é igual a $(q_v^2 + q_w^2)^{0,5} = 0,025$. Definida a força excitadora, apresentam-se a seguir três diferentes projeções do diagrama de bifurcações para barra com imperfeição geométrica inicial $v_0 = 0,01$. Na projeção Ω_v vs. v vs. w dada na Figura 5.13.a verifica-se a presença de apenas dois braços de soluções periódicas (azul e vermelho), um a menos do que observado na Figura 5.3.a para a mesma barra em flexão simples, evidenciando já uma importante mudança no cenário bifurcativo do sistema devido à aplicação do carregamento inclinado. Tomando a frequência

de vibração da excitação como parâmetro de controle ($\Omega_v = \Omega_w$), verifica-se na Figura 5.13.a que o braço de soluções periódicas, identificado na cor azul, passa por quatro pontos limites, três deles do tipo sela-nó (SN1, SN2 e SN3) e um do tipo pitchfork (PF1), mudando nestes a sua estabilidade. Entre os pontos SN1 e SN2 e entre os pontos SN3 e PF1 as soluções são instáveis. Ainda, no ponto de bifurcação pitchfork (PF1) surge e desaparece o outro braço de soluções não triviais, identificado na cor vermelha. Este braço passa por dois pontos limites do tipo sela-nó (SN4 e SN5), sendo estável apenas entre eles.

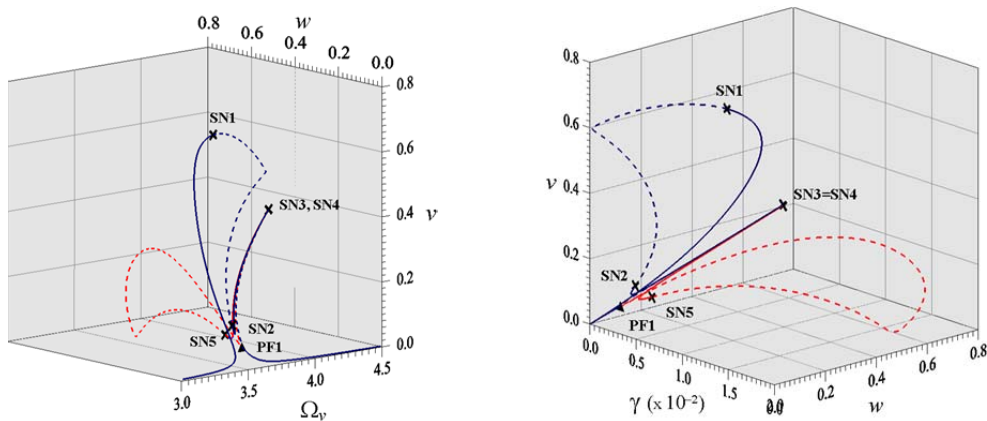
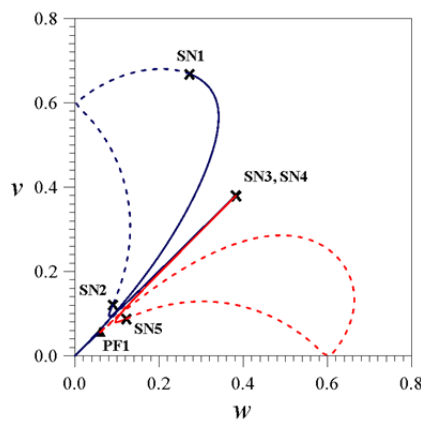
(a) Projeção Ω_v vs. v vs. w (b) Projeção γ vs. v vs. w (c) Projeção v vs. w

Figura 5.13 – Diagramas de bifurcações para barra com amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$, solicitação lateral $Q_v = Q_w = 0,01767766952 \cos(\Omega t)$ e imperfeição geométrica inicial $v_0 = 0,01$.

Comparando as projeções γ vs. v vs. w do diagrama de bifurcações (Figura 5.3.b e Figura 5.13.b para barra em flexão simples e oblíqua, respectivamente) confirma-se que a solução trivial, isto é, a de movimento planar ($v \neq 0,0$ e $\gamma = 0,0$), não ocorre em flexão oblíqua. Em adição, na projeção v vs. w do diagrama de bifurcações (Figura 5.3.c) verifica-se uma quebra de simetria no cenário

bifurcativo, a qual foi observada à 45° na Figura 3.22.d, evidenciando assim, outra influência das imperfeições geométricas iniciais na resposta dinâmica do sistema.

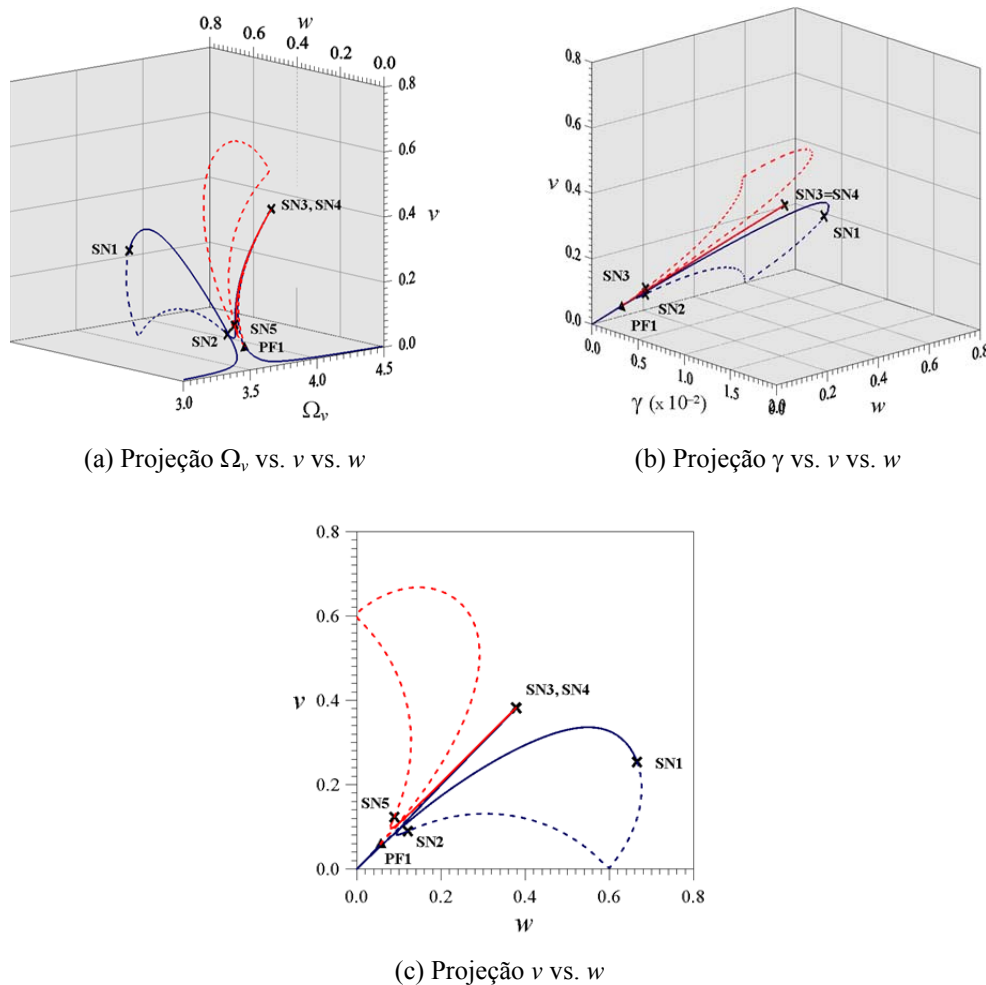
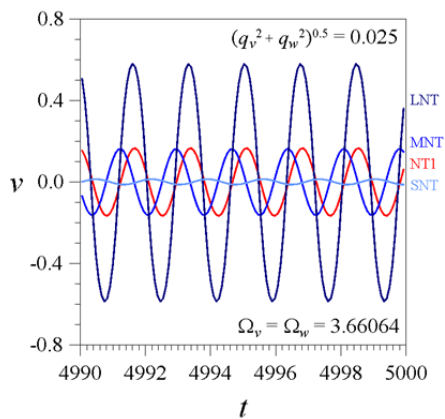


Figura 5.14 – Diagrama de bifurcações para barra com amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$, solicitação lateral $Q_v = Q_w = 0,01767766952 \cos(\Omega t)$ e imperfeição geométrica inicial $w_0 = 0,01$.

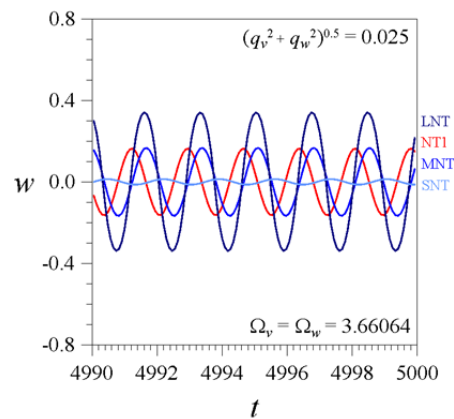
Considerando agora a imperfeição geométrica inicial $w_0 = 0,01$, apresentam-se na Figura 5.14, a exemplo da Figura 5.13, as projeções Ω_v vs. v vs. w , γ vs. v vs. w e v vs. w do diagrama de bifurcações. Também neste caso, a inclinação do carregamento marca o comportamento da estrutura, alterando significativamente o cenário bifurcativo do sistema. Isto pode ser qualitativamente observado comparando-se a Figura 5.14 (flexão oblíqua) com a Figura 5.4 (flexão simples). Além disso, em virtude da simetria da seção transversal (quadrada) e da simetria da solicitação (aplicada a 45°), pode-se observar que a resposta dinâmica da estrutura com imperfeição $w_0 \neq 0,0$ é o reflexo da resposta obtida para $v_0 \neq 0,0$. Este comportamento é claramente observado confrontando a Figura 5.13.c com a Figura 5.14.c. Isto quer dizer que os deslocamentos v e w da barra com

imperfeição geométrica inicial $v_0 = 0,01$ (Figura 5.13.c) são iguais aos deslocamentos w e v , respectivamente, da barra com $w_0 = 0,01$ (Figura 5.14.c).

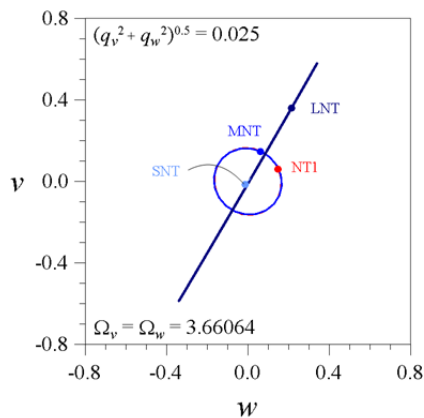
Para reforçar as observações anteriores, apresenta-se na Figura 5.15 e Figura 5.16 a resposta no tempo, plano de fase, seção de Poincaré e configuração deformada da barra para $\Omega_v = \Omega_w = 3,66064$, considerando, respectivamente, $v_0 = 0,01$ e $w_0 = 0,01$. As soluções que aparecem nestas referem-se, respectivamente, aos diagramas de bifurcações da Figura 5.13 e Figura 5.14.



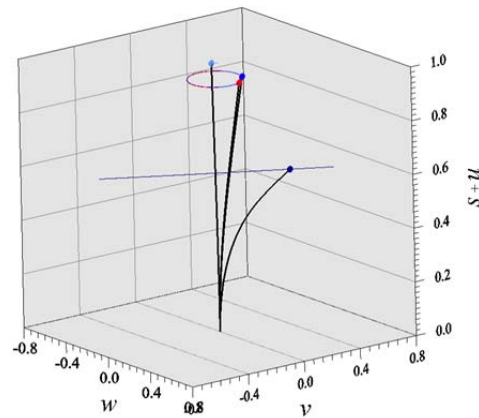
(a) Resposta no tempo v vs. t



(b) Resposta no tempo w vs. t



(c) Projeção do espaço de fase no plano v vs. w e seção de Poincaré



(d) Projeção do espaço de fase no espaço $(s + u)$ vs. v vs. w , seção de Poincaré e configuração deformada da barra

Figura 5.15 – Soluções estáveis coexistentes para $q_v = q_w = 0,01767766952$, $\Omega_v = 3,66064$ e $v_0 = 0,01$.

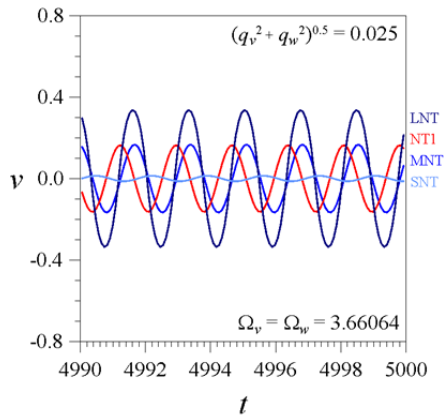
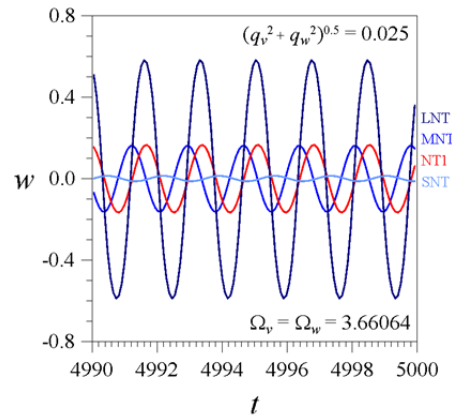
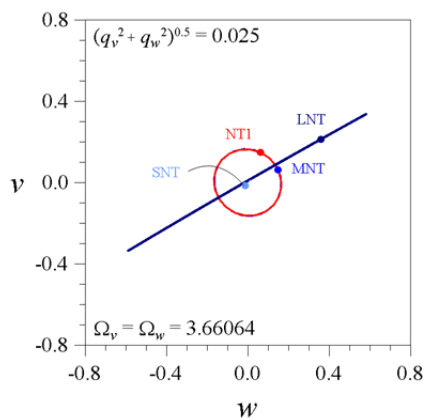
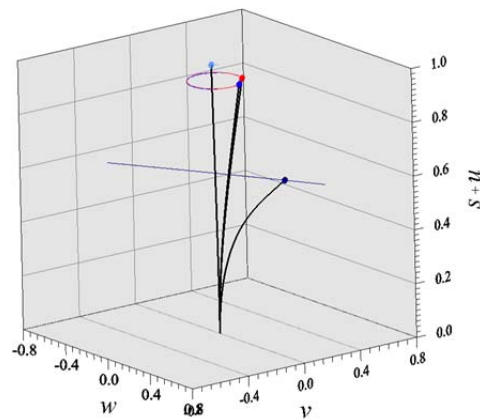
(a) Resposta no tempo v vs. t (b) Resposta no tempo w vs. t (c) Projeção do espaço de fase no plano v vs. w e seção de Poincaré(d) Projeção do espaço de fase no espaço $(s + u)$ vs. v vs. w , seção de Poincaré e configuração deformada da barra

Figura 5.16 – Soluções estáveis coexistentes para $q_v = q_w = 0,01767766952$, $\Omega_v = 3,66064$ e $w_0 = 0,01$.

Na Figura 5.15 e Figura 5.16 verifica-se a presença de quatro soluções estáveis, todas de período 1 (quatro pontos fixos na Figura 5.15.c e Figura 5.16.c). Cada atrator está associado a uma órbita fechada no plano de fase e cada órbita corresponde a uma das soluções identificadas nas respostas no tempo (Figura 5.15.a-b e Figura 5.16.a-b), sendo uma de pequena amplitude de vibração (atrator SNT associada à solução azul claro), duas de amplitude de vibração moderada (atratores MNT e NT1 associadas, respectivamente, às soluções azul e vermelho) e uma solução não planar de grande amplitude de vibração (atrator LNT associada com a solução azul escura). A assinalada correspondência entre os deslocamentos v e w das barras com imperfeições $v_0 = 0,01$ e $w_0 = 0,01$, é mais uma vez observada comparando a Figura 5.15 e Figura 5.16. Somadas às

anteriores, a Figura 5.15.d e Figura 5.16.d ilustra a deformação da barra. Em particular, verifica-se nestas a acentuada flexão da barra quando ela assume a configuração associada às vibrações de grande amplitude.

Comparando as respostas obtidas para $v_0 = 0,01$ (Figura 5.13) e $w_0 = 0,01$ (Figura 5.14), conclui-se que as duas imperfeições geométricas funcionam como imperfeições com sinais diferentes (Thompson e Hunt, 1984). Verifica-se isto na Figura 5.17, na qual se comparam as curvas de ressonância dos dois casos com a da barra perfeita. Enquanto a curva para $v_0 = 0,01$ aproxima-se da curva ideal pelo lado esquerdo, a curva para $w_0 = 0,01$ aproxima-se da curva de referência pelo lado direito (Figura 5.17.b).

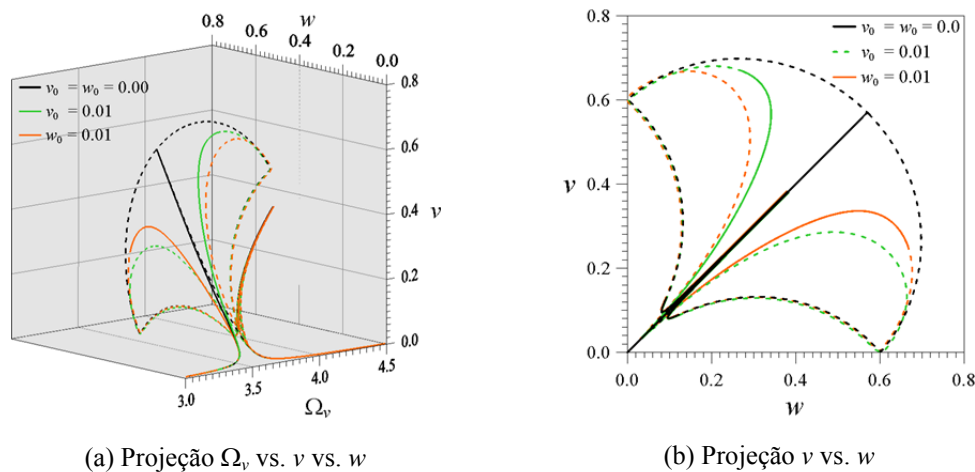
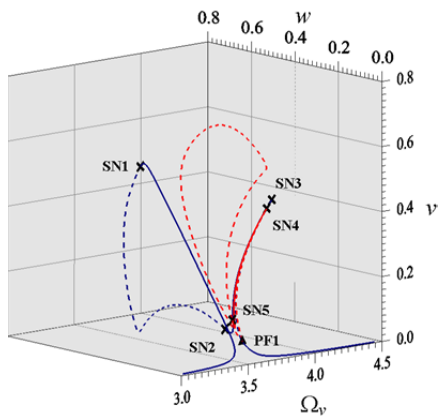
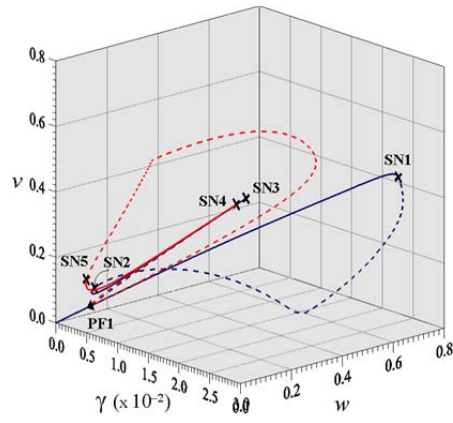


Figura 5.17 – Comparação entre os diagramas de bifurcações da Figura 6.20 ($v_0 = 0,01$) e Figura 6.21 ($w_0 = 0,01$) com o da barra sem imperfeições geométricas iniciais ($v_0 = w_0 = 0,00$).

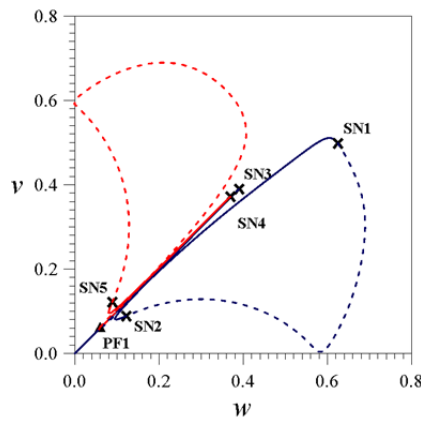
Avançando no estudo do movimento acoplado de barras com imperfeições geométricas iniciais e submetidas à flexão oblíqua, apresenta-se na Figura 5.18 o diagrama de bifurcações para barra com imperfeições $v_0 = w_0 = 0,01$. Nas três projeções apresentadas verifica-se que imperfeições iguais nas duas direções, isto é, imperfeições simétricas, não resultam em diagramas com simetria a 45° , como observado na Figura 3.12 para barra com seção transversal simétrica (quadrada) e carregamento simétrico (aplicado a 45°). Desconsiderando no sistema de equações o ângulo de torção da barra (Figura 5.19), isto é, em um sistema com dois graus de liberdade: v e w , a referida simetria é obtida, significando com isto que a quebra de simetria apontada deve-se à consideração do ângulo de torção e à bifurcação PF1. Na Figura 5.18.d e Figura 5.18.e são mostrados detalhes da região em torno do ponto PF1.



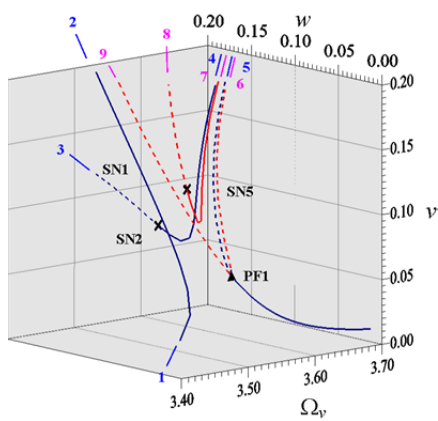
(a) Projeção Ω_v vs. ν vs. w



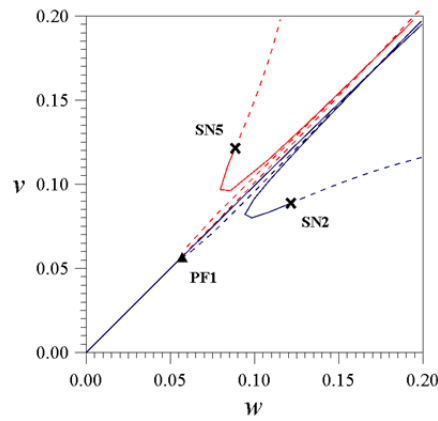
(b) Projeção γ vs. ν vs. w



(c) Projeção ν vs. w



(d) Detalhe da projeção Ω_v vs. ν vs. w



(e) Detalhe da projeção ν vs. w

Figura 5.18 – Diagrama de bifurcações para barra com amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$, solicitação lateral $Q_v = Q_w = 0,01767766952 \cos(\Omega t)$ e imperfeição geométrica inicial $v_0 = w_0 = 0,01$.

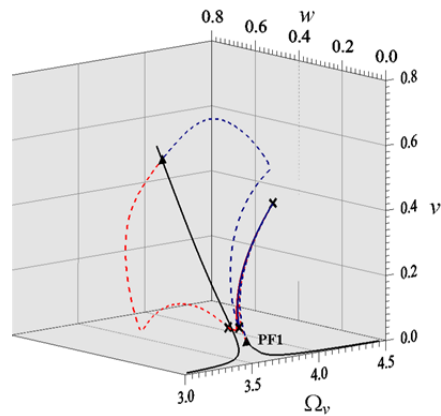
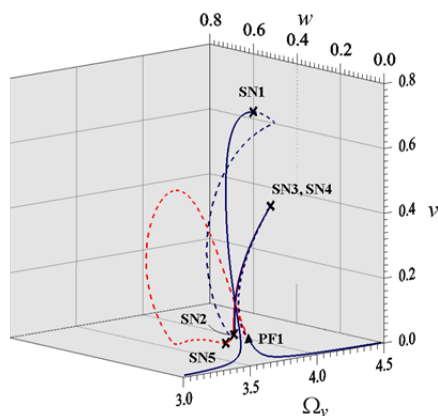


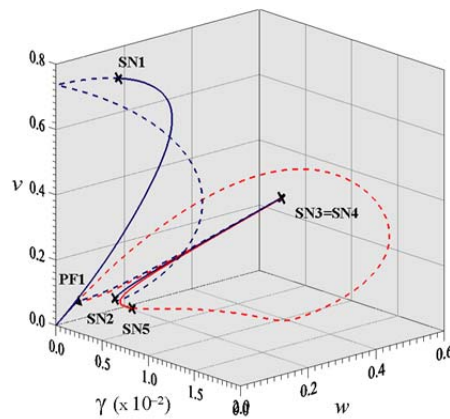
Figura 5.19 – Diagrama de bifurcações para barra com amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$, solicitação lateral $Q_v = Q_w = 0,01767766952 \cos(\Omega t)$ e imperfeição geométrica inicial $v_0 = w_0 = 0,01$.

Do exposto verifica-se que as imperfeições geométricas iniciais levam à quebra de simetria da resposta dinâmica da estrutura, mesmo com as imperfeições e o sistema dinâmico sendo simétricos.

Quando o sistema dinâmico não é simétrico, por exemplo, se a carga lateral resultante forma com o plano XY ângulo de $22,5^\circ$, a resposta do sistema cresce em complexidade, tal como se pode observar nos diagramas de bifurcações dados na Figura 5.20 e Figura 5.21, para $v_0 = 0,01$ e $w_0 = 0,01$, respectivamente.



(a) Projeção Ω_v vs. v vs. w



(b) Projeção γ vs. v vs. w

Figura 5.20 – Diagramas de bifurcações para barra com amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$, solicitação lateral $Q_v = 0,02256463211 \cos(\Omega_v t)$ e $Q_w = 0,01076277742 \cos(\Omega_w t)$ e imperfeição geométrica inicial $v_0 = 0,01$.

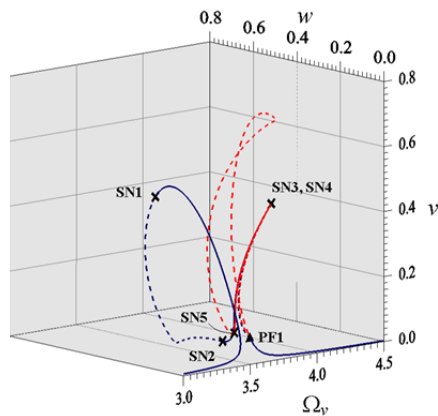
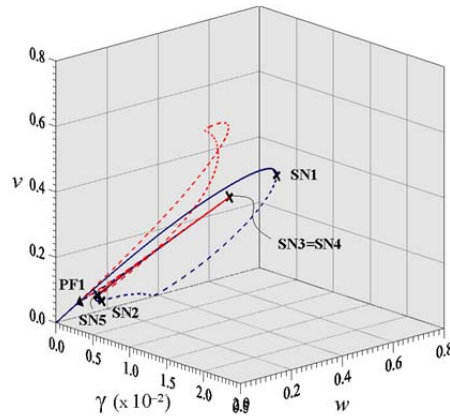
(a) Projeção Ω_v vs. ν vs. w (b) Projeção γ vs. ν vs. w

Figura 5.21 – Diagrama de bifurcações para barra com amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$, solicitação lateral $Q_v = 0.02256463211 \cos(\Omega_v t)$ e $Q_w = 0.01076277742 \cos(\Omega_w t)$ e imperfeição geométrica inicial $w_0 = 0,01$.

Na realidade, o número de bifurcações observadas nos diagramas da Figura 5.20 e Figura 5.21, bem como, a estabilidade das soluções entre eles, não se altera devido à inclinação da carga a $22,5^\circ$, sendo estes, portanto, cenários bifurcativos intermediários aos observados na Figura 5.3 e Figura 5.13, para $\nu_0 = 0,01$, e entre os da Figura 5.4 e Figura 5.14, para $w_0 = 0,01$.

5.5.

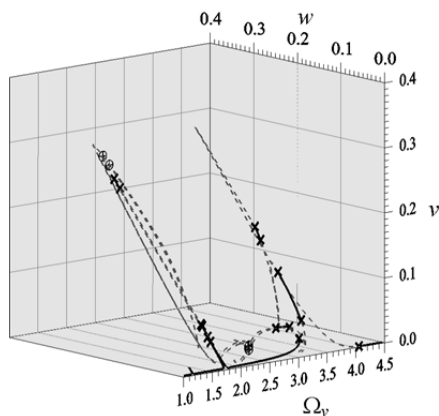
Seção transversal em forma de cruz.

Para avaliar a influência relativa das imperfeições geométricas iniciais na resposta dinâmica de barras com baixa rigidez à torção, considera-se agora uma barra uniforme, de seção transversal em forma de cruz, com espessura e , altura h e largura b , sendo $L / b = 25,0$ e $b = h$. Um segmento deformado da barra e a geometria da sua seção transversal foram anteriormente apresentados na Figura 4.1. Para o estudo das vibrações forçadas, considera-se novamente uma excitação lateral harmônica, uniformemente distribuída e de magnitude $Q_v(s) = q_v \cos(\Omega_v t)$, onde $q_v = 0,025$ é a amplitude da excitação, Ω_v a frequência da excitação e t o tempo. Também, neste estudo, consideram-se os coeficientes de amortecimento viscoso $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$.

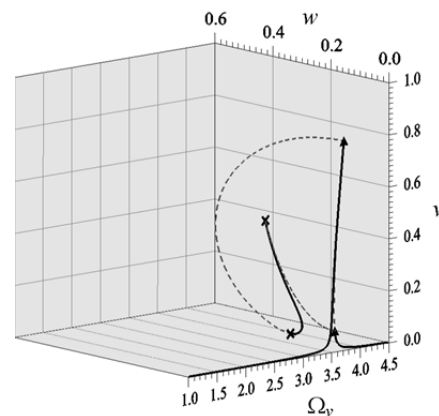
Na Figura 5.22 apresentam-se as projeções Ω_v vs. ν vs. w do diagrama de bifurcações para a barra com (Figura 5.22.a) e sem (Figura 5.22.b) imperfeições

geométricas iniciais ($v_0 = w_0 = 0,025$). Comparando as projeções, verifica-se a grande influência das imperfeições geométricas nas bifurcações do sistema com baixa rigidez à torção, justamente pela proximidade com a região de ressonância interna 1:1:1.

Em particular, e pela primeira vez neste trabalho, verifica-se na Figura 5.22.a uma região de ressonância na metade da frequência natural de vibração da barra, $\Omega_v \approx \omega_0 / 2$, ($\omega_0 = 3,516$), onde, como se pode verificar pela resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré da Figura 5.23 ($\Omega_v = 1,77$), uma solução estável de período 1 (preto), e com um período igual à metade do período da excitação, (em azul), ocorre, ou seja uma ressonância superharmônica de ordem.

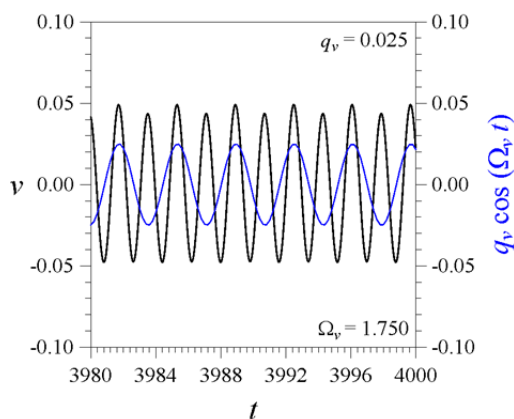


(a) Projeção Ω_v vs. v vs. w , considerando $v_0 = w_0 = 0,025$

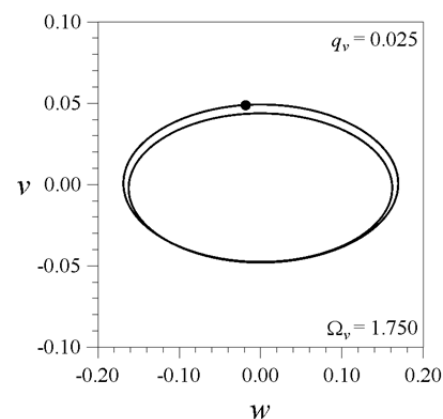


(b) Projeção Ω_v vs. v vs. w , considerando $v_0 = w_0 = 0,00$

Figura 5.22– Diagrama de bifurcações para barra com razão $e / b = 0,0625$, frequência naturais $\omega_v = \omega_w = 3,516$ e $\omega_\gamma = 3,702$, amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$ e solicitação lateral $Q_v = 0,025 \cos(\Omega_v t)$.



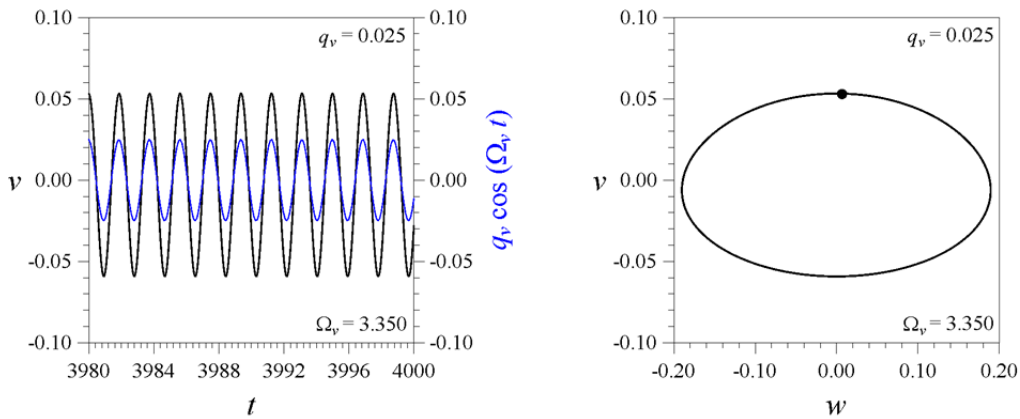
(a) Projeção v vs. t da resposta no tempo



(b) Plano fase e seção de Poincaré

Figura 5.23 – Soluções periódicas estáveis identificadas no diagrama de bifurcações da Figura 5.22.a, considerando $\Omega_v = 1,75$.

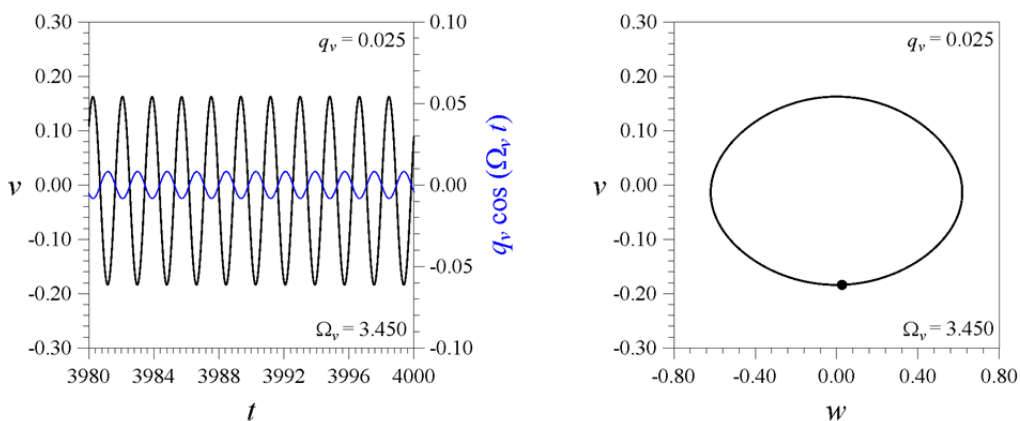
Na região fundamental de ressonância, as soluções também oscilam com o mesmo período da excitação, estando estas em fase para $\Omega_v = 3,35$ (Figura 5.24) e fora de fase para $\Omega_v = 3,45$ (Figura 5.25).



(a) Projecção v vs. t da resposta no tempo

(b) Plano fase e seção de Poincaré

Figura 5.24 – Soluções periódicas estáveis identificadas no diagrama de bifurcações da Figura 5.22.a, considerando $\Omega_v = 3,35$.

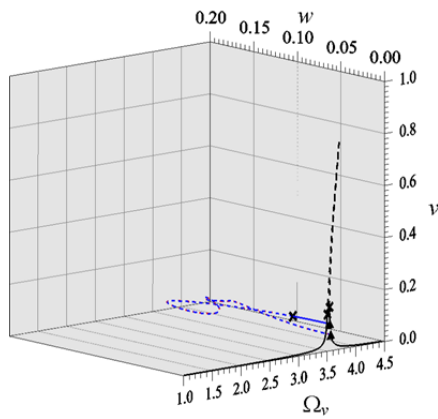
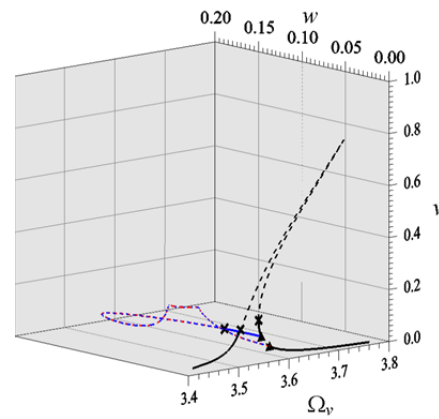


(a) Projecção v vs. t da resposta no tempo

(b) Plano fase e seção de Poincaré

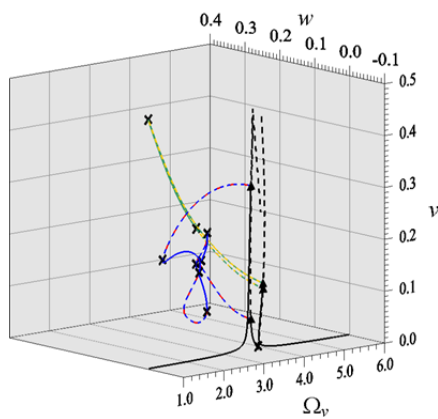
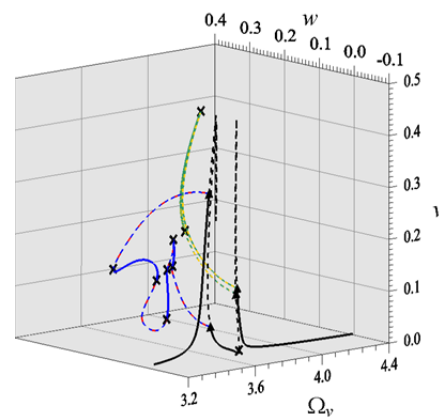
Figura 5.25 – Soluções periódicas estáveis identificadas no diagrama de bifurcações da Figura 5.22.a, considerando $\Omega_v = 3,45$.

Considerando imperfeições não simétricas, o cenário bifurcativo do sistema torna-se extremamente complexo, como se pode verificar nas Figura 5.28 a 5.28. Na Figura 5.26 são apresentados os resultados para $v_0 = 0,001$ e solicitação lateral $Q_v = 0,025 \cos(\Omega_v t)$ e na Figura 5.27, para $w_0 = 0,001$ e $Q_v = 0,025 \cos(\Omega_v t)$. Verifica-se que mesmo uma pequena imperfeição inicial tem uma grande influência no comportamento não linear de barras com baixa rigidez à torção e que a direção da imperfeição muda completamente as bifurcações e possíveis soluções estáveis da estrutura.

(a) Projeção Ω_v vs. v vs. w 

(b) Detalhe da Figura 2.a

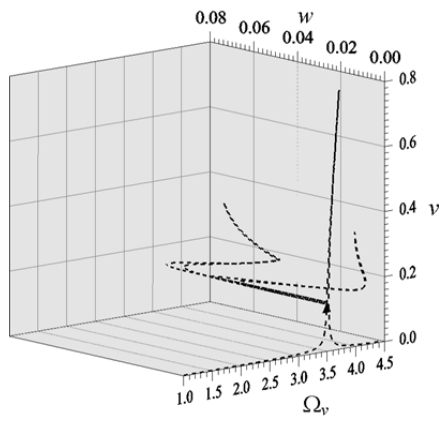
Figura 5.26 – Diagrama de bifurcações para barra com razão $e/b = 0,0625$, amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$, solicitação lateral $Q_v = 0,025 \cos(\Omega v t)$ e imperfeição geométrica $v_0 = 0,001$.

(a) Projeção Ω_v vs. v vs. w 

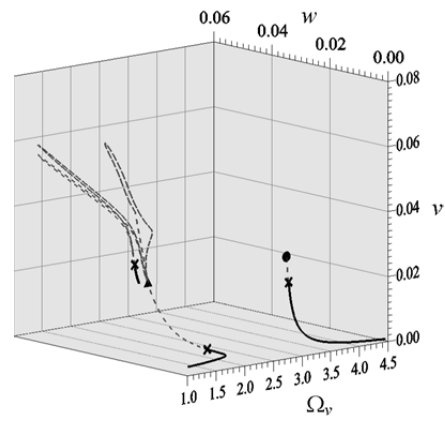
(b) Detalhe da Figura 3.a

Figura 5.27 – Diagrama de bifurcações para barra com razão $e/b = 0,0625$, amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$, solicitação lateral $Q_v = 0,025 \cos(\Omega v t)$ e imperfeição geométrica $w_0 = 0,001$.

Considerando imperfeições maiores, ou seja, $v_0 = 0,025$ ou $w_0 = 0,025$, como se pode verificar na Figura 5.28, poucos trechos com soluções periódicas estáveis foram detectados, corroborando a necessidade da inclusão das imperfeições iniciais na análise dinâmica não linear de barras com baixa rigidez à torção, um aspecto ainda não estudado na literatura.



(a) Projeção Ω_v vs. v vs. w , considerando $v_0 = 0,025$



(b) Projeção Ω_v vs. v vs. w , considerando $w_0 = 0,025$

Figura 5.28 – Diagrama de bifurcações para barra com razão $e/b = 0,0625$, amortecimento $c_v = c_w = c_\gamma = 0,6\%$ e solicitação lateral $Q_v = 0,025 \cos(\Omega v t)$.