3.
Otimização sob Incerteza

Os problemas de otimização tentam resolver, de forma eficiente, situações do mundo real por meio de modelos matemáticos que utilizam parâmetros incertos. Pode-se encontrar na literatura, diferentes abordagens para lidar com estas incertezas, dentre as quais a programação estocástica.

3.1.
Programação Estocástica

A programação estocástica é definida como um modelo de otimização que apresenta um ou mais parâmetros estocásticos, também conhecidos como fatores de risco. O objetivo é encontrar uma solução ótima, dadas todas as possíveis realizações desses parâmetros. Pode ser dividida em:

- Modelos de recurso: Esta abordagem foi proposta originalmente por Dantzig e Beale, ambos em 1955, para problemas de programação estocástica com dois estágios. Nele uma decisão de primeiro estágio é tomada sem o conhecimento dos valores futuros dos parâmetros estocásticos e, em seguida, uma decisão de recurso é efetuada dependendo da realização obtida. Apesar de ter sido proposto para solução de modelos de programação estocástica de dois estágios, pode ser estendido para modelos multi-estágio.
- Modelos probabilísticos: Esta abordagem foi apresentada por Charnes e Cooper (1959) e permite que algumas restrições de segundo estágio sejam expressas em termos de declarações probabilísticas sobre as decisões de primeiro estágio. Modelos probabilísticos são uteis quando os custos e benefícios associados às decisões de segundo estágio são difíceis de serem avaliados (Ribas 2008).

De acordo com Valladão (2008), a classe de modelos de programação estocástica mais importante dentro do ALM são os modelos de recurso. Utilizando uma abordagem linear multi-estágio, muitos autores desenvolveram modelos de ALM com programação estocástica, principalmente para fundos de pensão.

Modelo de Programação Linear Estocástica com Dois Estágios

O modelo de programação estocástica mais conhecido é o de programação linear de dois estágios (Shapiro e Philpott, 2012). Esse modelo divide as variáveis de decisão em dois estágios, como o nome sugere. As variáveis do primeiro estágio devem ser decididas antes da realização das incertezas e as variáveis de segundo estágio são usadas como medidas de correção contra qualquer inviabilidade que tenha surgido, após a realização das incertezas. Esse modelo pode ser formulado da seguinte maneira:

Modelo 3.1: Modelo de Programação Estocástica com Dois Estágios

Minimizar $$c^T x + E[Q(x,\xi)] \tag{3.1}$$

sujeito a

$$Ax \leq b \tag{3.2}$$

$$x \geq 0 \tag{3.3}$$

Onde $Q(x,\xi)$ é o valor ótimo do problema de segundo estágio representado abaixo:

Minimizar $$q^T y \tag{3.4}$$

sujeito a

$$Wy \leq h - Tx \tag{3.5}$$

$$y \geq 0 \tag{3.6}$$

Nesta formulação, x é o vetor das variáveis de decisão de primeiro estágio; c, A e b são os dados associados ao problema de primeiro estágio; y é o vetor das variáveis de decisão de segundo estágio; e $\xi = (q, T, W, h)$ contém os dados para o problema de segundo estágio, que podem ser representados por variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecidas. Ressalta-se que as variáveis q, T, W, h são as variáveis de decisão do segundo estágio.

A decisão de primeiro estágio x depende apenas da informação disponível até aquele momento e, dessa forma, independe das realizações do segundo estágio. Isto é, no primeiro estágio, deve-se tomar a decisão do tipo "aqui e agora" do vetor de x, antes da realização das incertezas ξ. No segundo estágio, as informações incertas ξ já estão disponíveis, e é tomada a decisão sobre o valor do vetor y.

Modelo de Programação Linear Estocástica Multi-estágios

No caso da programação estocástica multi-estágio, os acontecimentos futuros θ são revelados progressivamente, de forma que haja um vetor de ajuste para cada novo estágio do problema.

$$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{e-1}\}$$
$$y(\xi) = \{y(\xi_1), \dots, y(\xi_{e-1})\}$$

Onde e é o número de estágios do problema.

A solução desse problema de otimização representa uma decisão sob incerteza, estruturada em uma árvore de possibilidades que representa, por sua vez, o futuro. Dessa maneira, a tomada de decisão é condicionada a cada nó da árvore, levando em consideração a informação até aquele ponto e o futuro relativo às suas ramificações, ou seja aos seus nós dependentes.

3.2.
Otimização de Cenários

Modelos baseados em cenários correspondem a uma metodologia útil para lidar com incertezas. Em tais modelos utiliza-se uma árvore de possibilidades, que traduzem as diferentes configurações de cenários possíveis, representando uma possível sequencia de realizações sobre um horizonte de planejamento.

Nesta seção serão desenvolvidos modelos que utilizam a média e a variância, obtidas através de cenários, como o Modelo do Desvio Absoluto Médio (MAD), desenvolvido por Konno e Yamazaki (1991) e o Modelo de Maximização da Utilidade Esperada.

O Modelo do Desvio Absoluto Médio

Konno e Yamazaki (1991) propuseram um modelo de otimização de portfolio que utiliza como medida de risco o desvio absoluto médio. Tal formulação considera que as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfolio, são representadas de forma discreta através de cenários.

Modelo 3.2: Modelo Otimização de Portfolio com Desvio Absoluto Médio

Minimizar $$\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} y^s \tag{3.7}$$

sujeito a

$$y_-^s \geq -\sum_{i=1}^{N} (\tilde{r}_i^s - \bar{r}_i)x_i \tag{3.8}$$

$$y_+^s \geq \sum_{i=1}^{N} (\tilde{r}_i^s - \bar{r}_i)x_i \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \bar{r}_i = \mu \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{3.11}$$

$$x_i \geq 0 \tag{3.12}$$

$i = 1,2,3 \ldots N$ e s = 1,...,S

Onde:

S = número de cenários utilizados para representar as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfolio;

y^s = variável auxiliar utilizada na modelagem do desvio absoluto médio associada ao cenário s;

N = número de ativos candidatos a compor o portfolio;

x_i = fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i;

$\tilde{r}_i^s$ = retorno do ativo i candidato a compor o portfolio;

$\bar{r}_i$ = valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfolio;

μ = valor esperado dos retornos do portfolio (dado pelo investidor).

A Função Objetivo de (3.7), em conjunto com os dois primeiros conjuntos de restrições (3.8) e (3.9), modelam o desvio absoluto médio dos retornos do portfolio, que deve ser minimizado. A restrição (3.10) representa o valor esperado do retorno do portfolio, dado a variável μ, que é o valor desejado pelo investidor. A restrição (3.11) garante que todo o capital disponível seja investido, e a última restrição (3.12) assegura que não haverá investimento negativo.

Vale ressaltar que a variável auxiliar y^s pode ser definida como:

$$y^s \geq y_+^s \;\; e \;\; y^s \leq y_-^s$$

As variáveis y_+^s e y_-^s são introduzidas para medir o desvio positivo e negativo, respectivamente, do valor da média do portfolio (Zenios, 2007) .

Segundo Manzano (2004), uma medida de risco alternativa, porém equivalente ao desvio absoluto médio, é a empregada por Zenios e Kang (1993), os quais trabalharam apenas com valores absolutos dos desvios negativos em relação à média (semi-desvio absoluto médio). A equivalência de tais métricas está no fato de o desvio absoluto médio ser simétrico em relação à média. Logo, o semi-desvio absoluto médio é igual à metade do desvio absoluto médio.

Otimização da Utilidade Esperada

O modelo de maximização da utilidade esperada, descrito a seguir, é baseado no modelo descrito no livro de Zenios (*Practical Financial Optimization*), de 2007. Entretanto, segundo este autor, esse modelo de otimização foi amplamente abordado por diversos autores, especialmente nos trabalhos de Samuelson (1948 e 1950).

Esse modelo também foi descrito por Sharpe (2006) em um artigo sobre a otimização de portfolios utilizando otimização da utilidade esperada. De acordo com Sharpe, o objetivo do investidor seria maximizar a utilidade esperada do seu *portfolio*. Nesse caso, associado ao retorno do *portfolio*, em cada cenário, está a utilidade que mede o *"nível de felicidade"* do investidor, associado ao retorno total em um determinado cenário. Dessa forma, o modelo de maximização da utilidade esperada pode ser descrito conforme o modelo abaixo:

Modelo 3.3: Maximização da Utilidade Esperada

Maximizar $$\sum_{s=1}^{S} p^s \mathcal{U}(R(x;r^s)) \tag{3.13}$$

sujeito a

$$R(x;r^s) = \sum_{i=1}^{N} r_i^s x_i \tag{3.14}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{3.15}$$

$$x_i \geq 0 \tag{3.16}$$

$i = 1,2,3 \ldots N$ e s = 1,...,S

Onde:

N = número de ativos candidatos a compor o portfolio;

x_i = fração do capital a ser aplicado no ativo i;

S = número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfolio;

r^s = retorno do portfolio no cenário *s;*

r_i^s = retorno do i-ésimo ativo no cenário s;

p^s = probabilidade estatística de ocorrência do cenário s.

A Função Objetivo de (3.13), em conjunto com a primeira restrição (3.14), modela a maximização da utilidade esperada. Ou seja, a Função Objetivo tem como meta maximizar a utilidade esperada do retorno do portfolio em cada cenário s, denotada como $\mathcal{U}(\mathrm{R}(\mathrm{x}; \mathrm{r}^{\mathrm{s}}))$, dado a probabilidade deste cenário ocorrer $(\mathrm{p}^{\mathrm{s}})$. A restrição (3.14) representa o retorno do portfolio no ambiente de cenários. A restrição (3.15) garante que todo o capital disponível seja investido, e a última restrição (3.16) assegura que não haverá investimento negativo.

Assim, a utilidade foi incorporada no modelo de otimização, com a finalidade de obter como resultado uma estrutura do *portfolio* que otimize a preferência do investidor.