

9. Referências Bibliográficas

- [1] AIUBE, F. A. L. **Modelagem dos Preços Futuros de Commodities: Abordagem pelo Filtro de Partículas**. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2005.
- [2] AIUBE, F. A. L. **Econometria para Séries Financeiras**. Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2007.
- [3] BARBER, B.; LYON, J. D. Firm size, book-to-market ration and security returns: A holdout sample of financial firms. **Journal of Finance**, v.52, p.875-884, 1997.
- [4] BEALE, E. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v.17, n.2, p.173-184, 1955.
- [5] BERGER, A. J.; MULVEY, J. M. The Home Account AdvisorTM: Asset and liability management for individual investors. In: __ZIEMBA W. T. And MULVEY, J. M. (Editores), *Worldwide Asset and Liability Modeling*, p. 634-665, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998.
- [6] BERKELAAR, A.; KOUWENBERG. R. Retirement saving with contribution payments and labor income as a benchmark for investments. *Econometric institute report ei-9946/a*, Erasmus University Rotterdam, Holanda, 1999.

- [7] BROCK, W.; DECHERT, W.; SCHEINKMAN, J.; LEBARON, B. A test for Independence based on the correlation dimensions, **Econometric Reviews**, v.15, p.197-235, 1996.
- [8] CARNEIRO, M. C. T. **Otimização sob incerteza de carteiras de investimentos**: aplicação à cadeia integrada de petróleo e derivados. Dissertação de Mestrado – Engenharia Industrial. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- [9] CHARNES, A.; COOPER, W. Chance-constrained programming. **Management Science**, v.6, n.1, p.73-79, 1959.
- [10] CONSIGLI, G. **Asset-Liability management for individual investors**. In: __ ZENIOS, S.; ZIEMBA, W. T. (Editores). Handbook of Asset and Liability Management – Volume 2: Applications and Case Studies, capítulo 17, p.752-827, North-Holland, Amsterdã, Holanda, 2007.
- [11] CONSIGLIO, A.; COCCO, F.; ZENIOS, S. Scenario optimization asset and liability modeling for individual investors. Working Paper 02-07, Hermes Center of Excellence on Computational Finance and Economics, School of Economics and Management, University of Cyprus, Nicosia, Cyprus, 2002.
- [12] CONSIGLIO, A.; COCCO, F.; ZENIOS, S. Scenario optimization asset and liability modeling for individual investors. **Annals of Operational Research**, v.152, p.167-191, 2007.
- [13] DANTZIG, G. Linear programming under uncertainty. **Management Science**, v.50, n.12 Supplement, p.1764-1769, 1955.

- [14] DEMPESTER, M. A. H.; MITRA, G.; PFLUG, G. C. Introduction to the special issue on portfolio construction and risk management, **Quantitative Finance**, v.7, n. 4, p. 357-358, 2007.
- [15] DERT, C. A dynamic model for asset liability management for defined benefit pension funds. In: ZIEMBA W. T. And MULVEY, J. M., editors, **Worldwide Asset and Liability Modeling**. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1998.
- [16] ESCUDERO, L. F.; QUINTANA, F. J.; SALMERON, J. Coro, a modeling and an algorithmic framework for oil supply, transformations and distribution optimization under uncertainty. **European Journal of Operational Research**, v.114, n. 3, p.638-656, 1999.
- [17] GONÇALVES Jr, C.; PAMPLONA, E; MONTEVECHI, J. **Seleção de carteiras através do modelo de Markowitz para pequenos investidores** – com o uso de planilhas eletrônicas. In: IX Simpep, Bauru/SP, 2002.
- [18] HUBBARB, D. The Failure of Risk Management: Why it's Broken and How to Fix it. John Wiley & Sons, p.46, 2009.
- [19] KALLBERG, J. G.; WHITE, R. W.; ZIEMBA, W. T. Short Term Financial Planning under Uncertainty. **Management Science**, v.28, n. 6, p.670-682, Jun, 1982.
- [20] KAUNT, M.; WALLACE, S.; VLADIMIROU H.; ZENIOS, S. A. Stability analysis of a portfolio management model based on the Conditional Value-at-Risk measure. Working paper, HERMES European Center of Excellence on Computacional Finance and Economics, 2003.
- [21] KONNO, H.; YAMAZAKI, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and it application to Tokyo Stock Market. **Management Science**, v.37, n. 5, p. 519-531, 1991.

- [22] KOUWENBERG, R. Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. **European Journal of Operational Research**, v.134, p. 279-292, 2001.
- [23] KUSY, M. I.; ZIEMBA, W. T. A bank asset and liability management model. **Operations Research**, v.34, n.3, pp.356-376, 1986. Publicado em <http://www.jstor.org/stable/170927>, último acesso em setembro, 2011.
- [24] JARQUE, C.; BERA, A. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial Independence of regression residuals. **Economics Letters**, North-Holland Publishing Company, v.7, p.313-318, 1981.
- [25] JORION, P. **Value at Risk**: The new benchmark for controlling market risk. Irwin Professional Publishing, IL, 1996.
- [26] MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v.7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- [27] MARKOWITZ, H. M. Individual versus institutional investing. **Financial Services Review**, v.1, p. 1-8, 1991.
- [28] MANZANO, L. G. B. **Otimização de portfólio de contratos de energia em sistemas hidrotérmicos com despacho centralizado**. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004.
- [29] MERTON, R. C. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica* 41, v. 41, n. 5, p.867-887, Setembro, 1973.
- [30] MERTON, R. C. Financial innovation and the management and regulation of financial institutions. **Journal of Banking & Finance**, v.19 (3-4), p.461-481, 1995.

- [31] MULVEY, J. M.; ROSENBAUM, D. P.; SHETTY, B. Strategic financial risk management and operational research. **European Journal of Operational Research**, p.1-16, 1997.
- [32] PELLEGRINI, F.; FOGLIATTO, F. Passos para a implementação de sistemas de previsão de demanda – técnica e estudo de caso. **Revista Produção**, v.11, p.43-46, Rio de Janeiro/RJ, 2001.
- [33] RIBAS, G. **Modelo de programação estocástica para o planejamento estratégico da cadeia integrada de petróleo**. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- [34] ROLL, R. A critique of the asset pricing theory's test Part I: On past and potential testability of the theory. **Journal of Financial Economics**, v.4, n.2, p.129-176, 1977.
- [35] ROSS, S. The arbitrage theory of capital asset pricing. **Journal of Economic Theory**, v.13, n.3, p.341-360, 1976.v
- [36] SAMANEZ, C. P. **Gestão de Investimentos e Geração de Valor**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2007.
- [37] SAMUELSON, P. Consumption theory in terms of revealed preference. **Economica**, v.15, p.243-253, 1948.
- [38] _____. The problem of integrability in utility theory. **Economica**, v.17, p.355-385, 1950
- [39] SHAPIRO, A.; PHILPOTT, A. **A Tutorial on stochastic programming**. 2007. Disponível em: http://www2.isye.gatech.edu/people/faculty/Alex_Shapiro/TutorialSP.pdf. Último acesso em 25 de junho de 2012.

- [40] SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of Market equilibrium under conditions of risk. **Journal of Finance**, v.19, p.425-442, 1964.
- [41] SHARPE, W. F.; TINT, L. G. Liabilities – A New Approach. **Journal of Portfolio Management**, v.16, n.2, p.5-10, Winter (inverno) 1990.
- [42] SHARPE, W. F. Expected utility asset allocation, Setembro, 2006, revisado em junho de 2007.
- [43] SHARPE, W. T.; SCOTT, J. S.; WATSON, J. G. Efficient Retirement Financial Strategies, 2007.
- [44] SIMONASSI, G. A. **Estimando a Taxa de Retorno Livre de Risco no Brasil**. In: 6º Encontro Brasileiro de Finanças, Vitória-ES, Brasil, julho 2006 & Encontro Nacional de Economia, Salvador, Brasil, dezembro 2006.
- [45] SIMS, C. Macroeconomics and reality. **Econometrica**. v.48, p.1–48, 1980.
- [46] TOBIN, J. Liquidity preference as behavior towards risk. **The Review of Economic Studies**, v.25, p.65-68, 1958.
- [47] VALLADAO, D. M. **Alocação ótima e medida de risco de um ALM para fundo de pensão via programação estocástica multi-estágio e bootstrap**. Dissertação de Mestrado em Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- [48] ZENIOS, S.; KANG, P. Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization for Mortgage Backed Securities, **Annals of Operations Research**, v.45, n.1-4, p.433-450, 1993.

- [49]ZENIOS, S.; ZIEMBA, W. T. (Editores). **Handbook of Asset and Liability Management – Volume 1: Theory and Methodology**, North-Holland, Amsterdã, Holanda, 2006.
- [50]ZENIOS, S.; ZIEMBA, W. T. (Editores). **Handbook of Asset and Liability Management – Volume 2: Applications and Case Studies**, North-Holland, Amsterdã, Holanda, 2007.
- [51]ZENIOS, S. **Practical Financial Optimization: Decision Making for Financial Engineers**, Blackweel, Cambridge, Inglaterra, 2007.
- [52]ZIEMBA, W. T. **The Stochastic Programming Approach to Asset, Liability and Wealth Management**, **AIMR Publisher**, v.05, 2003.
- [53]ZIEMBA W. T. And MULVEY, J. M., editors, **Worldwide Asset and Liability Modeling**. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1998.

Anexo 1

Definição A1.1: Retorno do Portfolio. O retorno do portfolio é dado pela fórmula abaixo:

$$R(x; \tilde{r}) = x_1 \tilde{r}_1 + \dots + x_N \tilde{r}_N = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i$$

Onde:

N = número de ativos candidatos a compor o portfolio;

x_i = fração do capital a ser aplicado no ativo i ;

\tilde{r}_i = são os retornos dos ativos individuais (distribuídos aleatoriamente);

Definição A1.2: Retorno Esperado da Carteira. O retorno esperado do portfolio é dado pela seguinte fórmula:

$$R(x; \bar{r}) = x_1 \bar{r}_1 + \dots + x_N \bar{r}_N = \sum_{i=1}^N x_i \bar{r}_i$$

Onde:

$\bar{r}_i = \varepsilon(\tilde{r}_i)$ = valor esperado dos retornos do ativo i ;

Definição A1.3: Variância da Carteira. A variância do portfolio de ativos x_i está descrita abaixo:

$$\begin{aligned} V = \sigma^2 &= E \left[(R(x; \tilde{r}) - R(x; \bar{r}))^2 \right] = E \left[\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i \bar{r}_i \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Onde:

σ_{ij} = covariância entre os retornos dos ativos i e j ;

Definição A1.4: Covariância. A covariância de diferentes ativos é dada pela seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = E[(\tilde{r}_i - \bar{r}_i)(\tilde{r}_j - \bar{r}_j)]$$

Em particular,

$$\sigma_{ii} = E[(\tilde{r}_i - \bar{r}_i)(\tilde{r}_i - \bar{r}_i)] = E(\tilde{r}_i - \bar{r}_i)^2 = V(r_i)$$

Definição A1.5: Risco Diversificável e Risco de Mercado.

Conforme dito anteriormente, a variância de uma carteira com N ativos pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_{ij} x_i x_j$$

Caso montantes iguais sejam aplicados em cada ativo, em uma carteira de N ativos a proporção aplicada em cada um deles será de $\frac{1}{N}$. Aplicando essas proporções à equação da variância obtém-se:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N}\right) \left(\frac{1}{N}\right) \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{N}\right) \left(\frac{1}{N}\right) \sigma_{ij}$$

Reescrevendo essa equação encontramos a seguinte fórmula:

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2}{N} + \left(\frac{N-1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{ij}}{N(N-1)} = \left(\frac{1}{N}\right) \bar{\sigma}_i^2 + \left(\frac{N-1}{N}\right) \bar{\sigma}_{ij}$$

Onde:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2}{N} = \bar{\sigma}_i^2 = \text{Variância média do portfólio};$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{ij}}{N(N-1)} = \bar{\sigma}_{ij} = \text{Covariância média do portfólio}.$$

O primeiro termo dessa expressão refere-se ao **risco diversificável**, que pode ser eliminado no processo de diversificação da carteira. O segundo termo da equação acima é referente ao **risco de mercado**, que não pode ser reduzido ao aumentar o número de ativos na carteira. Dessa forma, o risco de um portfólio bem diversificado depende somente do risco e mercado dos ativos pertencentes a esta carteira (Princípio de Diversificação).

Definição A1.6: Modelo Uni-Fatorial. O valor do retorno esperado do ativo i pode ser descrito pela seguinte equação de regressão linear:

$$\tilde{r}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{r}_m + \tilde{\epsilon}_i \quad (\text{A1.6})$$

$$\bar{r}_i = \varepsilon[\alpha_i + \beta_i \bar{r}_m + \tilde{\epsilon}_i] = \alpha_i + \beta_i \bar{r}_m \quad (\text{A1.7})$$

Onde:

\bar{r}_i = retorno esperado do ativo i ;

α_i = intercepto da regressão;

β_i = coeficiente angular da regressão;

$\tilde{\epsilon}_i$ = resíduo da regressão linear, com média 0 e variância σ^2 .

\bar{r}_m = rentabilidade esperada do portfolio de mercado = índice que representa o mercado;

A variância do ativo i é dada por:

$$\sigma_i^2 = E[(\tilde{r}_i - \bar{r}_i)^2]$$

Substituindo \bar{r}_i e \tilde{r}_i pelas equações (3.11) e (3.12):

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= E[(\beta_i(\tilde{r}_m - \bar{r}_m) + \tilde{\epsilon}_i)^2] \\ &= \beta_i^2 * E[(\tilde{r}_m - \bar{r}_m)^2] + 2\beta_i * E[(\tilde{r}_m - \bar{r}_m)\tilde{\epsilon}_i] + E[\tilde{\epsilon}_i^2] \\ &= \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\tilde{\epsilon}_i}^2 \end{aligned}$$

A variância possui dois componentes: i. $\beta_i^2 \sigma_m^2$ - relaciona-se ao comportamento do mercado e ii. $\sigma_{\tilde{\epsilon}_i}^2$ - representa a variabilidade dos retornos do ativo que não é explicada pela variabilidade do retorno do mercado. O β_i refere-se ao risco não diversificável do ativo i .

A covariância entre ativos i e j é dada por:

$$\sigma_{ij} = E[(\tilde{r}_i - \bar{r}_i)(\tilde{r}_j - \bar{r}_j)]$$

Substituindo \bar{r}_i e \tilde{r}_i pelas equações (A1.6) e (A1.7):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= E[(\beta_i(\tilde{r}_m - \bar{r}_m) + \tilde{\epsilon}_i)(\beta_j(\tilde{r}_m - \bar{r}_m) + \tilde{\epsilon}_j)] \\ &= \beta_i\beta_j * E[(\tilde{r}_m - \bar{r}_m)^2] + \beta_i * E[(\tilde{r}_m - \bar{r}_m)\tilde{\epsilon}_i] + \beta_j * E[(\tilde{r}_m - \bar{r}_m)\tilde{\epsilon}_j] \\ &\quad + E[\tilde{\epsilon}_i\tilde{\epsilon}_j]\end{aligned}$$

Os últimos três termos da equação acima é igual a zero. Portanto,

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2$$

Usando as estimações das médias pelo Modelo Uni-Fatorial pode-se escrever a o retorno esperado do portfólio:

$$R(x; \bar{r}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^N \beta_i \bar{r}_m x_i$$

Similarmente, a variância do portfólio pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \sigma_m^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^N \sigma_{\epsilon_i}^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \beta_i \beta_j \sigma_m^2 x_i x_j\end{aligned}$$

Anexo 2

Definição A2.1: Estratégia *Lockbox*.

Essa parte do capítulo está dedicada a investigação do artigo de Sharpe, Scott e Watson (2007), que avaliaram as diferentes regras de poupança e gastos para aposentados e propuseram uma nova estratégia chamada *Lockbox*, “Cofre Compartimentado”.

Segundo esses autores, para cada período e cenário, o investidor deve escolher uma política de consumo e de investimento, o qual deve suportar esse consumo. Para tanto, o investidor deve escolher o nível de consumo que maximiza a sua utilidade:

$$\text{Maximizar } \sum p_t^s \mathcal{U}_t(C_t^s) \quad (\text{A2.1})$$

$$\text{sujeito a } W_0 = \sum C_t^s \psi_t^s \quad (\text{A2.2})$$

Segundo a condição de primeira ordem:

$$\frac{\mathcal{U}'_t(C_t^s)}{\mathcal{U}'_0(C_0^0)} = \frac{\psi_t^s}{p_t^s} \quad (\text{A2.3})$$

Onde:

s = cenário [$s \in S$];

t = número de períodos [$t \in T$];

p_t^s = probabilidade de ocorrência do cenário s no período t ;

C_t^s = Consumo no cenário s do período t ;

$\mathcal{U}_t(C_t^s)$ = Utilidade dado o nível de consumo C_t^s ;

W_0 = riqueza inicial;

ψ_t^s = preço do consumo;

A estratégia apresentada deve prever um valor de consumo único para cada retorno do mercado no período t . A dificuldade está em reconhecer a função utilidade do investidor.

Sharpe, então, utiliza um modelo binomial para ilustrar a estratégia apresentada:

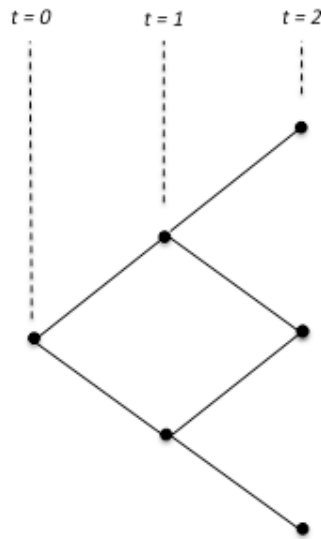


Figura 16 - Exemplo de árvore binomial.

R_u = Retorno do portfólio de mercado quando ocorre alta;

R_d = Retorno do portfólio de mercado quando ocorre baixa;

r_f = Retorno do ativo livre de risco;

Em $t = 0 \rightarrow V_{m,0} = 1$; Em $t = 1 \rightarrow V_{m,1} = R_{m,1}$; Em

$t = 2 \rightarrow V_{m,2} = V_{m,1}R_{m,2} = R_{m,1}R_{m,2}; \dots$

Nesse último caso, os valores possíveis do Valor do *Portfolio* do Mercado (Retorno Acumulado = $V_{m,t}$) é igual a $\{R_u^2; R_uR_d; R_d^2\}$.

Então:

$$V_{t,s} = (R_u)^s (R_d)^{(t-s)} \quad (\text{A2.4})$$

A probabilidade associada ao $V_{m,t}$ é:

$$p_t^s = \frac{t!}{s! (t-s)!} 2^{-t} \quad (\text{A2.5})$$

Além disso, associado a cada ramo da árvore está o preço da opção, que paga \$1 se o caminho for realizado. Por exemplo:

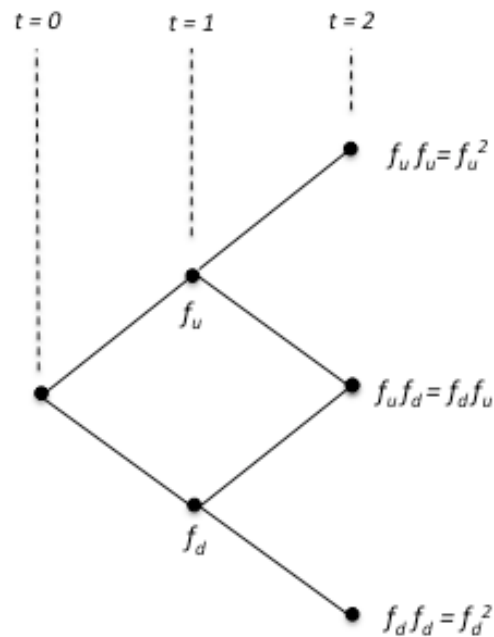


Figura 17 - Exemplo de árvore binomial com o valor da opção.

Nesse caso, o preço ψ_t^s de um cenário que paga \$1 se e somente se o cenário s acontecer é igual ao número de caminhos percorridos vezes o preço dado em cada caminho:

$$\psi_t^s = \frac{t!}{s! (t-s)!} (f_u)^s (f_d)^{(t-s)} \quad (\text{A2.6})$$

Com as equações (A2.5) e (A2.6), obtém-se:

$$\frac{\psi_t^s}{p_t^s} = 2^t (f_u)^s (f_d)^{(t-s)} \quad (\text{A2.7})$$

Se considerarmos as equações (A2.4) e (A2.7), podemos, por cálculo usando logaritmo, resolver esse sistema da seguinte maneira:

$$\frac{\psi_t^s}{p_t^s} = x = 2^t (f_u)^s (f_d)^{(t-s)} \quad (\text{A2.7})$$

$$\ln(x) = t \ln(2) + s \ln(f_u) + t \ln(f_d) - s \ln(f_d) \quad (\text{A2.8})$$

$$\ln(x) = s \ln(f_u/f_d) + t \ln(2f_d) \quad (\text{A2.9})$$

$$V_{t,s} = (R_u)^s (R_d)^{(t-s)} \quad (\text{A2.10})$$

$$\ln(V) = s \ln(R_u) + t \ln(R_d) - s \ln(R_d) \quad (\text{A2.11})$$

$$\ln(V) = s \ln(R_u/R_d) + t \ln(R_d) \quad (\text{A2.12})$$

$$s = \frac{\ln(V) - t \ln(R_d)}{\ln\left(\frac{R_u}{R_d}\right)} \quad (\text{A2.13})$$

Substituindo a equação (A2.13) na equação (A2.10) obtém-se:

$$\ln(x) = \left[\frac{\ln(V) - t \ln(R_d)}{\ln\left(\frac{R_u}{R_d}\right)} \right] \ln(f_u/f_d) + t \ln(2f_d) \quad (\text{A2.14})$$

$$\ln(x) = \left[\frac{\ln(V) \ln(f_u/f_d)}{\ln\left(\frac{R_u}{R_d}\right)} \right] - \left[\frac{t \ln(R_d) \ln(f_u/f_d)}{\ln\left(\frac{R_u}{R_d}\right)} \right] + t \ln(2f_d) \quad (\text{A2.15})$$

$$\ln(x) = -\ln(V) p + t \ln(R_d) p + t \ln(2f_d) \quad (\text{A2.16})$$

$$x = \frac{\psi_t^s}{p_t^s} = \frac{(a)^t}{(V)^p} \quad (\text{A2.17})$$

Onde:

$$f_u = \frac{R_f - R_d}{R_f(R_u - R_d)} \quad e \quad f_d = \frac{R_u - R_f}{R_f(R_u - R_d)}$$

$$p = \frac{\ln\left[\frac{R_u - R_f}{R_u - R_d}\right]}{\ln\left(\frac{R_u}{R_d}\right)}$$

$$a = 2f_d(R_d)^p$$

Com essas formulações, para alguns investidores a utilidade pode ser revelada e a utilidade marginal é dada de acordo com a combinação das equações (A2.3) e (A2.17). Por exemplo, se considerarmos um investidor, cujas *lockboxes* são compostas com o portfólio do mercado, no final de cada ano t , o consumo relativo a este ano será:

$$C_{t,s} = F_t V_{t,s}$$

e a utilidade marginal deste investidor será igual a:

$$U'_t(C) = \frac{a^t}{\left(\frac{F_t}{C_{t,s}}\right)^p}$$

Anexo 3

Teste de Independência

Neste anexo, está descrito um sumário das estatísticas relativas às séries históricas utilizadas para a seleção do *portfolio*. Abaixo está descrito um teste para avaliar se os elementos da amostra são idênticos e independentemente distribuídos (iid).

“O teste de independência ou dependência não linear mais apropriado para dados econômico-financeiros, que possuem amostras com tamanhos limitados, é o teste de Brock, Dechert, Scheinkman e LeBaron (1996)”.

Para isso, o teste BDS envolve o conceito de correlação espacial. Para examinar a correlação espacial, a série y_t^m deve ser inserida no espaço “ m ” construído pelo vetor:

$$y_t^m = [y_t, \dots, y_{t-m+1}]$$

Onde $t = 1, 2, \dots, N - m + 1$.

A dependência de y_t , então, é examinada através do conceito de correlação integral. Para cada dimensão m e um valor de ϵ , a correlação integral é definida por:

$$C(\epsilon, m, N) = \frac{1}{N_m(N_m - 1)} \sum_{t \neq s} I(y_t^m, y_s^m, \epsilon)$$

Onde $N_m = N - m + 1$, t e s variam entre 1 e $N - m + 1$ e

$$I(y_t^m, y_s^m, \epsilon) = \begin{cases} 1, & \text{se } \|y_t^m - y_s^m\| \leq \epsilon \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com isso, a correlação integral medirá a fração dos pares (y_t^m, y_s^m) para os quais a distância entre esses fatores não é superior a ϵ . Variando t e s é possível contar os pares que satisfazem essa condição. Em seguida, divide-se esse valor pelo número total de pares.

Sob a hipótese nula de independência a estatística BDS é assintoticamente $N(0,1)$:

$$BDS(\epsilon, m, T) = \frac{\sqrt{T}[C(\epsilon, m, T) - C(\epsilon, 1, T)^m]^{1/2}}{V^{1/2}}$$

Onde V é variância. A aproximação assintótica é válida para $T/m > 200$. Quando esse fato não é observado, no caso de amostras pequenas, pode-se usar a técnica de *bootstrap* para gerar diversos cenários de p-valores.

Teste BDS

O teste estatístico BDS testa a hipótese nula de que os elementos de uma série temporal é independente e identicamente distribuído (iid).

$$\begin{cases} H_0: \text{série temporal } (y_t) \text{ é independente} \\ H_1: \text{há dependência} \end{cases}$$

Para o teste, considerou-se $m = 2$ a 5 e ϵ variando de $0,5$ a $2,0$ vezes o desvio padrão da série. A estatística BDS foi calculada através do software *E-Views* e os resultados estão descritos na tabela abaixo:

	$m = 2$				$m = 3$			
	$0,5\sigma$	$1,0\sigma$	$1,5\sigma$	$2,0\sigma$	$0,5\sigma$	$1,0\sigma$	$1,5\sigma$	$2,0\sigma$
Ibovespa	0,0316	0,00722	-0,0003	-0,0003	0,00153	0,03412	-0,0106	0,00228
Dólar	0,03993	-0,0117	-0,0278	-0,0028	0,02889	-0,0115	-0,0716	-0,0450
CDI	0,64931	0,09056	0,10167	0,06493	0,04334	0,11342	0,22043	0,14416
	$m = 4$				$m = 5$			
	$0,5\sigma$	$1,0\sigma$	$1,5\sigma$	$2,0\sigma$	$0,5\sigma$	$1,0\sigma$	$1,5\sigma$	$2,0\sigma$
Ibovespa	-0,0019	0,01764	-0,0396	-0,0075	-0,0007	0,01102	-0,1038	-0,1471
Dólar	-0,00284	-0,0263	-0,1418	-0,1442	-0,0014	-0,0182	-0,1487	-0,2599
CDI	0,01302	0,08816	0,28677	0,23448	-0,0023	0,09576	0,34233	0,29807

Tabela 2 – Estatística BDS para retornos anuais das classes dos ativos sobre o período de Janeiro de 1995 a Dezembro de 2011. Testou-se a hipótese de que as séries são independentes.

A hipótese nula é rejeitada se o valor da estatística BDS for superior aos

valores críticos, em valor absoluto, para o nível de significância α .

$$|BDS| > |\tau_\alpha|$$

Na **Tabela 2**, são representados os p-valores do teste BDS, obtidos a partir de *bootstrap* com 1000 repetições. A hipótese nula é fortemente aceita apenas quando os p-valores forem maiores ou iguais do que o nível de significância de 5%, para todos os elementos da **Tabela 2**.

Esse resultado é importante porque a utilização do método de geração de cenários utilizado, especificado no Capítulo 6, (*bootstrapping*) pode sofrer desvantagens consideráveis quando as séries não são independentes ou identicamente distribuídas. No entanto, a incoerência nos resultados só ocorre se a função objetiva é descrita por meio do CVaR dos retornos do portfólio, conforme documentado por Kaunt et al. (2003). Isso porque inconsistência advém de problemas na estimação da cauda da distribuição, reduzindo o poder da estimação do *Value-at-Risk*.

Teste de Normalidade

Uma possível avaliação das séries temporais consiste na análise de sua normalidade. Para isso, usa-se o teste de Jarque-Bera (Jarque e Bera, 1981), o qual testa as características de normalidade da distribuição de probabilidades. A estatística é baseada nas diferenças entre os coeficientes de assimetria e curtose da distribuição amostral da série e da distribuição teórica normal, seguindo uma distribuição qui-quadrada χ^2 com $n - 1 - k$ graus de liberdade. Para a Distribuição Normal, Simetria = 0 e Curtose = 3. Esse teste pode ser feito através do *E-Views*. A fórmula abaixo descreve o teste:

$$JB_i = T \left\{ \left(\frac{S_i^2}{6} \right) + \left[\frac{(K_i - 3)^2}{24} \right] \right\}$$

Onde:

JB_i é a estatística Jarque-Bera para o portfólio;

T é o número de observações;

S_i é o coeficiente de assimetria e

K_i é o coeficiente de curtose.

A hipótese nula e alternativa no teste Jarque-Bera são:

$$\begin{cases} H_0: \text{série temporal } (y_t) \text{ é normalmente distribuída} \\ H_1: \text{não } H_0 \end{cases}$$

Como pode ser observado, a hipótese nula se baseia em um teste conjunto de simetria e curtose ($H_0: S = 0$ e $K = 3$) com grau de liberdade igual a 2. Assim, valores elevados de JB levariam à rejeição da hipótese nula e, conseqüentemente, à transgressão do pressuposto de normalidade da série.

Abaixo estão os histogramas das séries dos ativos: **1.** Ibovespa, **2.** Dólar e **3.** CDI e as suas estatísticas correspondentes:

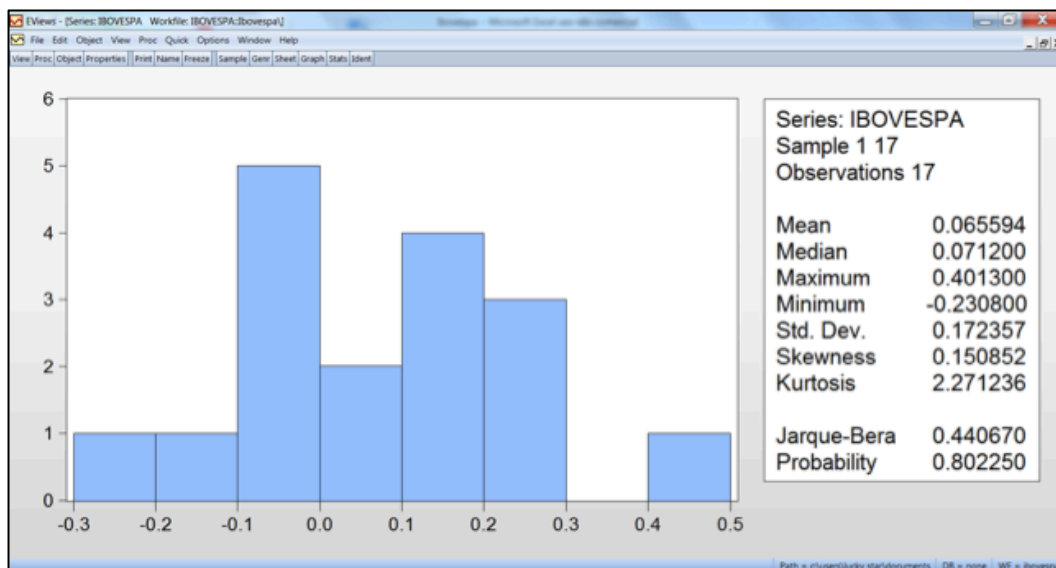


Figura 18 – Histograma e estatísticas da série histórica dos retornos da Ibovespa.

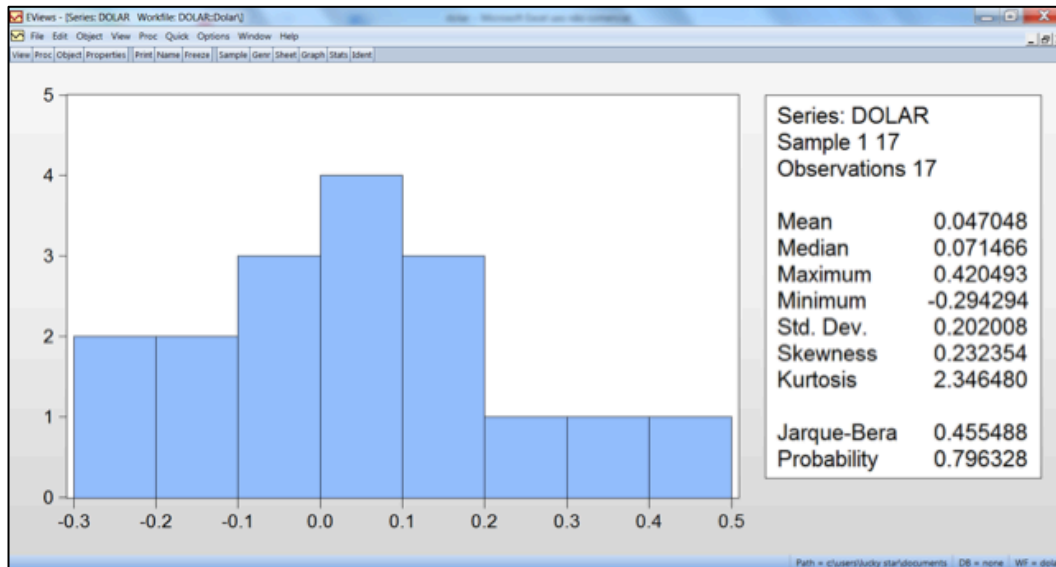


Figura 19 – Histograma e estatísticas da série histórica dos retornos do dólar.

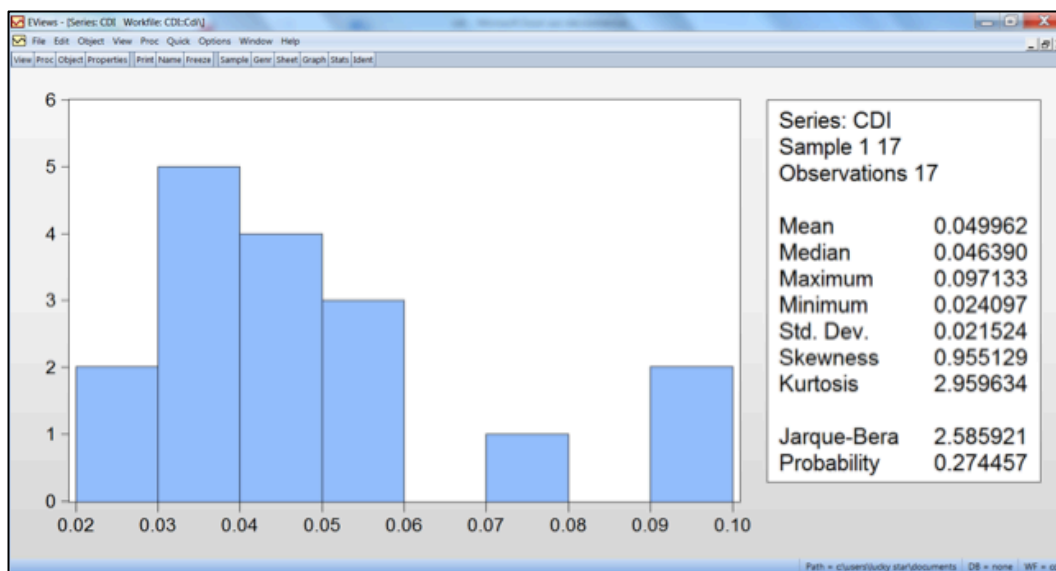


Figura 20 – Histograma e estatísticas das séries históricas do CDI.

De acordo com os resultados observados na estatística Jarque-Bera, percebe-se que para a série temporal do ativo 3 estudado, CDI, deve-se rejeitar a hipótese nula de normalidade.

Por meio do gráfico de histograma da série Ibovespa e Dólar e dos resultados observados de curtose e simetria é possível identificar uma grande proximidade com o gráfico da distribuição normal. Diferente das séries dos demais ativos, os quais apresentam um nível de curtose muito elevado e, facilmente, pode-se rejeitar a hipótese de normalidade dessas séries.

Não obstante, apesar da hipótese nula ser rejeitada para, pelo menos, um dos ativos estudados, é importante observar que o propósito do estudo é validar se o modelo de otimização de portfólio apresentado por Consiglio et al. (2002) se comporta conforme o esperado, não sendo de grande relevância as séries históricas consideradas neste teste.

Anexo 4

Abaixo está apresentado o modelo utilizado na linguagem C:

```
# =====
#   Personal Finance Model
#   =====

# Parameters
param T; # Planning Horizon
param S; # Number of scenarios
param N; # Number of assets

# Sets
set HH := 0..T; # Set of periods
set SS := 1..S; # Set of scenarios
set XX := 1..N; # Set of assets

# Deterministic factors
param lambda; # Penalty for terminal debt
param g{s in SS, t in HH}; # Growth of liability
param rf{s in SS, t in HH}; # Risk free interest rate at time t
param r{s in SS, t in HH, i in XX}; # assets return

# Decision variables
var U{s in SS}; # Utility
var HO{i in XX} >= 0; # Asset holdings
var YP{s in SS, t in HH} >= 0; # yPlus - surplus in excess of growth rate
var YM{s in SS, t in HH} >= 0; # yMinus - deficit in lack of growth rate

# Objective
maximize obj: (1/S) * sum{s in SS} U[s];
```

Constraints

subject to Utility{s in SS}:

$$U[s] = \sum\{t \text{ in } 1..T\} ((YP[s,t] - \lambda * YM[s,t]) \\ * (\prod\{\tau \text{ in } 0..t-1\}(g[s,\tau])) \\ * (\prod\{\tau \text{ in } t..T-1\}(rf[s,\tau])));$$

subject to balance{s in SS, t in 1..T}:

$$YP[s,t] - YM[s,t] = \sum\{i \text{ in } XX\} (HO[i] * r[s,t,i]) - (g[s,t] - 1);$$

subject to capacity{s in SS, t in 1..T}:

$$\sum\{i \text{ in } 1..N\} HO[i] = 1;$$

end;