

5 Otimização da Resposta

Nesta seção serão apresentadas as otimizações das respostas para os dois Estudos de Caso, levando em consideração os respectivos modelos selecionados no Capítulo 4.

5.1. Caso 1

No estudo de caso da espuma do xampu, é recomendável que a altura de espuma obtida apresente um valor superior a 170 mm. Várias formulações podem resultar em uma média de futuras previsões da resposta superior a 170 mm. Sendo assim, um objetivo desejável é maximizar o valor esperado para uma futura resposta.

O vetor estimado para os coeficientes é $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y}$, cuja matriz variância-covariância é $\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}$. O valor previsto para a resposta no ponto \mathbf{w} (\mathbf{w}' é uma matriz linha de \mathbf{W}) é representado por $\hat{y}(\mathbf{w})$ e sua variância é $\text{var}[\hat{y}(\mathbf{w})] = \sigma^2\mathbf{w}'(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{w}$. Suponha um ponto qualquer \mathbf{w}_0 no espaço dos componentes de mistura, o modelo no ponto pode ser representado como $y(\mathbf{w}_0) = \mathbf{w}_0'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.

A estimativa para uma nova resposta neste ponto é a mesma estimativa da média:

$$E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = \mathbf{w}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (5.1)$$

A variância para a nova resposta neste ponto é então:

$$\text{var}[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = \text{var}(\mathbf{w}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \text{var}(\mathbf{w}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{w}_0'(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{w}_0 + \sigma^2 \quad (5.2)$$

O problema de otimização pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\max E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = \mathbf{w}_0'\boldsymbol{\beta}$$

Sujeito a:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1;$$

$$0 \leq v_1 \leq 1;$$

$$0 \leq v_2 \leq 0,3;$$

$$0 \leq v_3 \leq 0,7.$$

Utilizando uma rotina de busca exaustiva na região das restrições dos componentes da mistura, codificada na linguagem do Matlab®, maximizou-se o valor esperado para uma futura resposta do Modelo Final (4.15), encontrando a solução:

$$v_1 = 0,6103; v_2 = 0,1397; v_3 = 0,2500;$$

$$\text{var}[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = 27,8203; E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = 177,3530.$$

Utilizando a Equação (2.6), tem-se a seguinte solução em termos de componentes reais:

$$x_1 = 0,5221; x_2 = 0,1679; x_3 = 0,3100.$$

Em termos de proporções verdadeiras dos componentes, tem-se:

$$A = 0,2610; B = 0,0840; C = 0,1550.$$

Comparando a solução obtida com a aplicação desta metodologia à utilizada por Cornell (2000) e Myers & Montgomery (2002), gerou-se a Tabela 21.

Tabela 21 - Comparativo dos Modelos de Mistura

<i>Modelo</i>	<i>Equação</i>	<i>PRESS</i>	<i>MSE</i>	<i>AIC_c</i>	$\text{var}[\hat{y}(\mathbf{w}_0)]$	$E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)]$
Cornell	(2.9)	657,1	25,14	83,9	37,74	174,14
Myers & Montgomery	(2.10)					
Modelo Final (4.15)	(4.15)	348,7	16,61	56,2	27,82	177,35
Redução obtida		46,9%	33,9%	33,0%	26,29%	-

Na Tabela 22 são comparados os modelos de Cornell (2000) e Myers & Montgomery (2002) ao Modelo Final (4.15), apresentando os valores dos componentes da mistura (em L-pseudocomponentes e *actual* componentes) que maximizam o valor esperado de uma futura resposta.

Tabela 22 - Valores dos componentes de mistura em L-pseudocomponentes e *actual* componentes

<i>Modelo</i>	<i>Equação</i>	v_1 (A)	v_2 (B)	v_3 (C)
Cornell	(2.9)	0,6040	0,0855	0,3105
Myers & Montgomery	(2.10)	(0,2604)	(0,0786)	(0,1611)
Modelo Final (4.15)	(4.15)	0,6103 (0,2610)	0,1397 (0,0840)	0,2500 (0,1550)

5.2.
Caso 2

No estudo de caso do adesivo de aplicação aeroespacial, é desejável que a força exigida para separar os componentes após o tempo de cura seja superior a 40 libras. Sendo assim, um objetivo desejável é maximizar o valor esperado para uma futura resposta.

Considerando que a média e a variância foram determinadas conforme as Equações (5.1) e (5.2), respectivamente, o problema de otimização pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\max E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = \mathbf{w}'_0 \boldsymbol{\beta}$$

Sujeito a:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1;$$

$$0 \leq v_1 \leq 1;$$

$$0 \leq v_2 \leq 0,25;$$

$$0 \leq v_3 \leq 0,75;$$

$$-1 \leq z_1 \leq 1;$$

$$-1 \leq z_2 \leq 1.$$

Utilizando uma rotina de busca exaustiva na região das restrições dos componentes da mistura, codificada na linguagem do Matlab®, maximizou-se o valor esperado de uma futura resposta do Modelo Final (4.21), encontrando a solução:

$$v_1 = 0,4638; v_2 = 0,2600; v_3 = 0,2762; z_1 = 1,0000; z_2 = -1,0000;$$

$$\text{var}[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = 16,0093; E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = 82,3177.$$

Utilizando a Equação (2.6), tem-se a seguinte solução em termos de componentes reais:

$$x_1 = 0,7928; x_2 = 0,1020; x_3 = 0,1052; z_1 = 100^\circ\text{F}; z_2 = 15,0\% \text{UR}.$$

Analisando e comparando a solução obtida com a aplicação desta metodologia à utilizada por Myers & Montgomery (2002), gerou-se a Tabela 23.

Tabela 23 - Comparativo dos Modelos de Mistura-Processo

Modelo	Equação	PRESS	MSE	AIC _c	var[$\hat{y}(\mathbf{w}_0)$]	E[$\hat{y}(\mathbf{w}_0)$]
Myers & Montgomery	(3.8)	903,2	15,5	122,6	21,5172	80,1773
Modelo Final (4.21)	(4.21)	515,4	10,1	108,1	16,0093	82,3177
Redução obtida		42,9%	34,4%	11,7%	25,60%	-

Na Tabela 24 são comparados os modelos de Myers & Montgomery (2002) ao Modelo Final (4.21), apresentando os valores dos componentes da mistura (em L-pseudocomponentes e componentes reais) e os níveis das variáveis de processo que maximizam o valor esperado de uma futura resposta.

Tabela 24 - Valores dos componentes de mistura em L-pseudocomponentes e componentes reais e níveis das variáveis de processo

<i>Modelo</i>	<i>Equação</i>	v_1 (x_1)	v_2 (x_2)	v_3 (x_3)	z_1 (T(°F))	z_2 (UR(%))
Myers & Montgomery	(3.8)	0,7400 (0,848)	0,2600 (0,102)	0,000 (0,050)	1,0 (100,0)	-1,0 (15,0)
Modelo Final (4.15)	(4.21)	0,4638 (0,793)	0,2600 (0,102)	0,2762 (0,105)	1,0 (100,0)	-1,0 (15,0)

Com o intuito de facilitar o controle das variáveis de processo durante a cura do adesivo, o experimentador recomenda uma temperatura de 70°F e umidade relativa de 30% (Myers & Montgomery, 2002).

Com isso, o problema de otimização pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\max E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = \mathbf{w}'_0 \boldsymbol{\beta}$$

Sujeito a:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1;$$

$$0 \leq v_1 \leq 1;$$

$$0 \leq v_2 \leq 0,25;$$

$$0 \leq v_3 \leq 0,75;$$

$$z_1 = 0;$$

$$z_2 = -0,57143.$$

Utilizando uma rotina de busca exaustiva na região das restrições dos componentes da mistura, codificada na linguagem do Matlab[®], maximizou-se o valor esperado de uma futura resposta do Modelo (4.21), encontrando a solução:

$$v_1 = 0,000; v_2 = 0,2600; v_3 = 0,7400; z_1 = 0,000; z_2 = -0,57143;$$

$$\text{var}[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = 13,4288; E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)] = 58,2788.$$

Utilizando a Equação (2.6), tem-se a seguinte solução em termos de componentes reais:

$$x_1 = 0,7000; x_2 = 0,1020; x_3 = 0,1980; z_1 = 70^\circ\text{F}; z_2 = 30,0\% \text{UR}.$$

Analisando e comparando a solução obtida com a aplicação desta metodologia à utilizada por Myers & Montgomery (2002), gerou-se a Tabela 25.

Tabela 25 - Comparativo dos Modelos de Mistura-Processo (Condição sugerida pelo experimentador)

<i>Modelo</i>	<i>Equação</i>	<i>PRESS</i>	<i>MSE</i>	$\text{var}[\hat{y}(\mathbf{w}_0)]$	$E[\hat{y}(\mathbf{w}_0)]$
Myers & Montgomery	(3.8)	903,20	15,45	18,1619	58,3423
Modelo Final (4.21)	(4.21)	515,43	10,13	12,4288	58,2788
Redução obtida		42,93%	34,42%	31,57%	-

Na Tabela 26 são comparados os modelos Myers & Montgomery (2002) ao Modelo Final (4.21), apresentando os valores dos componentes da mistura (em componentes reais).

Tabela 26 - Valores dos componentes de mistura em componentes reais e níveis das variáveis de processo (Condição sugerida pelo experimentador)

<i>Modelo</i>	<i>Equação</i>	x_1	x_2	x_3	z_1 (°F)	z_2 (%UR)
Myers & Montgomery	(3.8)	0,8480	0,1020	0,050	70	30
Modelo Final (4.21)	(4.21)	0,700	0,1020	0,1980	70	30