2
Referencial Teórico

2.1.
Medidas de Desempenho de Carteiras

Procurando encontrar uma carteira com risco mínimo, Markowitz (1952) utilizou como medida de risco a variância do retorno da carteira, tornando-se precursor na análise de decisão em formação de carteiras. O objetivo de seu trabalho foi determinar uma carteira de risco mínimo levando-se em consideração restrições de retorno mínimo e de uso do capital. O risco sobre o retorno foi tratado como variável aleatória e o indicador utilizado para definir o grau de exposição ao risco do ativo foi apenas o segundo momento da distribuição de probabilidades do retorno. Assim, para formar sua carteira de investimentos, um investidor deveria selecionar os ativos que tivessem as maiores expectativas de valorização e que apresentassem as menores variâncias de rendimento (menor risco).

A partir do trabalho de Markowitz surgiram vários índices e medidas de desempenho. Os autores Treynor (1965), Sharpe (1966) e Jensen (1968) contribuíram com o desenvolvimento de índices largamente conhecidos e aceitos no mercado. O índice de Sharpe, por exemplo, utiliza a divisão entre o retorno esperado e o desvio padrão do retorno da carteira como medida de desempenho.

Entretanto, a maioria dos índices de desempenho considera, como simplificação, que a média e a variância descrevem completamente uma distribuição de retornos. Considerando uma distribuição normal de retornos esta simplificação é válida, porém os retornos dos investimentos não necessariamente possuem este tipo de distribuição. Desta forma, momentos de ordens superiores, além da média e da variância, seriam necessários para representar melhor a distribuição dos retornos.

Além disso, os índices tradicionais tendem a concentrar as análises no potencial de perda, deixando de considerar possíveis vantagens de um investidor submeter-se a um grau de risco maior para obter melhores resultados. Um determinado tipo de investidor pode considerar como ganho um retorno num nível próximo à média enquanto outro enxergaria esse desempenho como uma perda.

Com relação ao controle de risco, foi desenvolvido pelo banco JP Morgan (1996) o *Value at Risk* (*VaR*). O *VaR* é uma forma sistemática de se determinar qual o valor de perda, em um determinado período, dado um certo nível de significância estatística. Por exemplo, um $VaR_{95\%}$ traduz em número que existe 5% de probabilidade de que um valor maior que o indicado seja perdido. Assim, para uma distribuição de valores, que podem ser os retornos de uma carteira, o *VaR* corresponderá ao valor associado a um percentil extremo definido da distribuição, que geralmente é 1% ou 5%.

2.2. Medida Ômega

A medida Ômega (Ω) proposta por Keating e Shadwick (2002) é capaz de superar a limitação dos índices tradicionais, pois incorpora todos os momentos da distribuição e fornece uma completa descrição de suas características de risco-retorno. Intuitiva e de fácil cálculo, ela também possibilita capturar nas análises de risco-retorno o impacto benéfico dos ganhos e o efeito negativo das perdas em relação a uma meta estabelecida pelo investidor.

O cálculo da medida Ômega é realizado a partir da definição do parâmetro L, que é estabelecido exogenamente e representa a fronteira acima da qual um retorno é considerado ganho e abaixo da qual considerado perda. O limite L pode ser, por exemplo, o índice *benchmark* de retorno para um fundo de investimentos ou a meta de resultado definida pelos acionistas de um projeto.

Fixado o parâmetro L e conhecida a distribuição de probabilidades de retorno de um ativo único ou de uma carteira, pode-se comparar a probabilidade de ganhos e perdas ponderadas pelo seu valor em relação à fronteira. Assim, o ganho esperado, dado um retorno superior a L, corresponde ao valor pelo qual o retorno esperado $E(r|r \geq L)$ supera a fronteira. Já a perda esperada, dado um retorno inferior a L, corresponde ao valor pelo qual o retorno esperado $E(r|r \leq L)$ fica abaixo da fronteira. Então o ganho esperado e a perda relativos à fronteira $r = L$ são, respectivamente, $g = E(r|r \geq L) - L$ e $p = L - E(r|r \leq L)$.

Entretanto, para comparar ganhos e perdas potenciais de forma significativa é necessário ponderá-los com suas probabilidades adequadas. Desta forma, sendo $F(r)$ a função de distribuição cumulativa dos retornos, a probabilidade de um retorno inferior à fronteira L é $F(L)$ e de um retorno superior a L é $1-F(L)$. Assim, a medida de desempenho é dada por $\frac{g\times(1-F(L))}{p\times F(L)}$, considerando apenas uma probabilidade particular de ganho ou perda. Já para um intervalo (a,b) de possíveis retornos no qual ganhos e perdas de quaisquer valores podem ocorrer com alguma probabilidade, a expressão deve ser generalizada através da soma das seqüências de ganhos e perdas ponderados por suas probabilidades correspondentes. À medida que os intervalos entre os valores dos retornos tendem a zero e somamos suas probabilidades ponderadas, obtemos, no limite, $G=\int_L^b[1-F(x)]dx$ para os ganhos e $P=\int_a^L F(x)dx$ para as perdas. A Figura 1 ilustra o exemplo de uma função de distribuição cumulativa dos retornos "x" e, estabelecendo $L=1{,}3$, os ganhos ponderados por sua probabilidade de ocorrência são representados pela área superior do gráfico, enquanto a área inferior representa as perdas ponderadas por sua probabilidade de ocorrência.

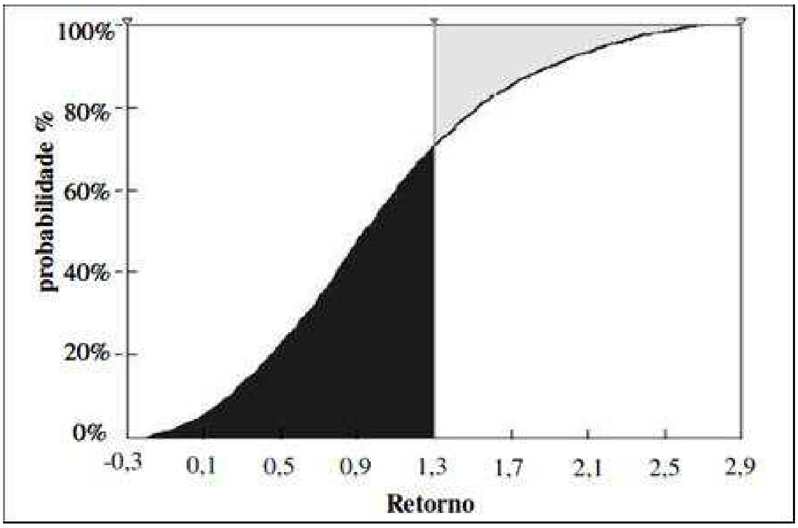

Figura 1 – Ilustração do Cálculo da Medida Ômega.

Fonte: Gomes et al. (2010)

A medida Ômega definida por Keating e Shadwick (2002), calculada em sua forma contínua, é representada como:

$$\Omega(L) = \frac{G}{P} = \frac{\int_L^b [1 - F(x)]dx}{\int_a^L F(x)dx} \tag{1}$$

Onde:

$F(x)$ é a função de distribuição cumulativa (FDC) dos retornos "x";

L é o nível mínimo dos retornos definido exogenamente;

a é o menor retorno do intervalo considerado;

b é o maior retorno do intervalo considerado.

No caso de uma distribuição de probabilidades de retornos discreta o cálculo da medida Ômega é simplificado. Com o objetivo de demonstrar o método de cálculo, a Figura 2 traz um exemplo de modelo de distribuição de retornos de um ativo utilizado em Castro (2008), no qual foi estabelecido um limite *L* = 1,4.

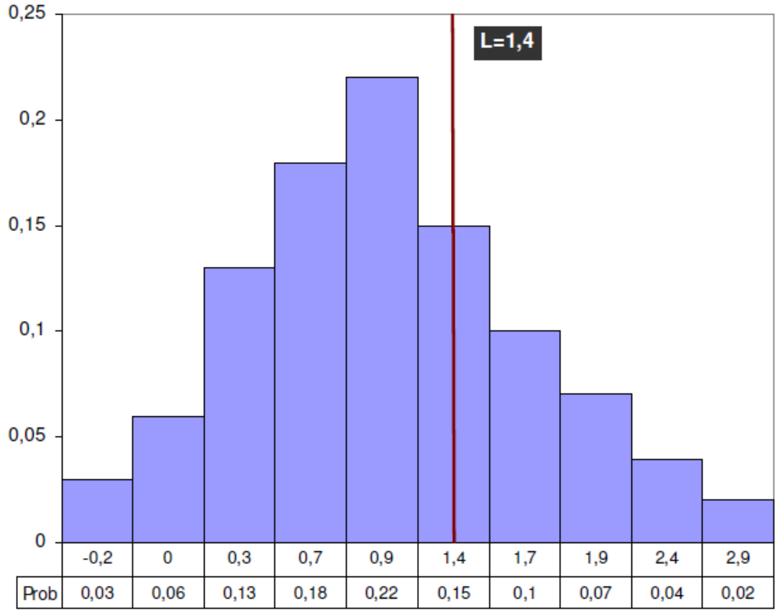

Figura 2 - Exemplo de distribuição de retornos com *L*=1,4.

Fonte: Castro (2008)

A partir da distribuição utilizada como exemplo foi gerada a Tabela 1 que traz a correspondência entre os retornos e suas respectivas probabilidades de ocorrência.

Tabela 1 - Retornos e suas probabilidades.

Retorno (x)	-0,2	0	0,3	0,7	0,9	1,4	1,7	1,9	2,4	2,9
Probabilidade	0,03	0,06	0,13	0,18	0,22	0,15	0,1	0,07	0,04	0,02

Fonte: elaboração própria.

Tendo em vista que o nível L estabelecido foi 1,4, calculamos a diferença entre os retornos e L e obtemos os resultados contidos na Tabela 2.

Tabela 2 - Diferenças entre retornos e nível *L*.

Retorno (x)	-0,2	0	0,3	0,7	0,9	1,4	1,7	1,9	2,4	2,9
(x - *L*)	-1,6	-1,4	-1,1	-0,7	-0,5	0	0,3	0,5	1	1,5
Probabilidade	0,03	0,06	0,13	0,18	0,22	0,15	0,1	0,07	0,04	0,02

Fonte: elaboração própria.

Assim, para encontrar o ganho esperado somamos os resultados positivos de $(x-L)$ multiplicados por sua probabilidade de ocorrência.

$$E[(x-L)|x>L] = (0{,}3\times 0{,}1)+(0{,}5\times 0{,}07)+(1\times 0{,}04)+(1{,}5\times 0{,}02)$$

$$E[(x-L)|x>L] = 0{,}135$$

A perda esperada é calculada realizando o mesmo procedimento com os resultados negativos de $(x-L)$.

$$E[(x-L)|x<L] = (-1{,}6\times 0{,}03)+(-1{,}4\times 0{,}06)+(-1{,}1\times 0{,}13)+(-0{,}7\times 0{,}18)+(-0{,}5\times 0{,}22)$$

$$E[(x-L)|x<L] = -0{,}511$$

O valor da medida Ômega será determinado através da expressão $\Omega = \dfrac{-E\left[(x-L)|x>L\right]}{E\left[(x-L)x<L\right]}$ e, portanto, para os valores do exemplo acima teremos $\Omega = \dfrac{-0{,}135}{-0{,}511} = 0{,}2642$.

O valor de Ômega menor que um encontrado significa que, para a meta L estabelecida em 1,4, a probabilidade de ocorrerem perdas é maior do que a de auferir ganhos. Se adotarmos o valor 0,7 para *L*, por exemplo, encontraremos **Ω**=3,8442, o que significa que para esta meta a probabilidade de ocorrerem ganhos é maior do que a de sofrer perdas. Quando a meta L recebe o valor da média da distribuição de retornos considerada encontra-se **Ω**=1, situação na qual a relação entre perdas e ganhos é de 1:1.